

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

20. Band, Heft 1

28. April 1939

S. 1—48

Algebra und Zahlentheorie.

Abstrakte Theorie der Ringe, Körper und Verwandtes:

Birkhoff, Garrett: Lattices and their applications. Bull. Amer. Math. Soc. 44, 793—800 (1938).

Knappe Zusammenstellung der Entwicklung und der Anwendungsmöglichkeiten der Verbandstheorie. *Lorenzen* (Göttingen).

Hopkins, Charles: Nil-rings with minimal condition for admissible left ideals. Duke math. J. 4, 664—667 (1938).

Es wird bewiesen, daß jeder nur aus nilpotenten Elementen bestehende Teilring eines nichtkommutativen Ringes O , in dem die Minimalbedingung für Linksideale gilt, selbst nilpotent ist. Bisher war dies nur für Ringe O , die den Doppelkettensatz erfüllen, bewiesen (vgl. J. Levitzki, dies. Zbl. 2, 327). Für die Begründung der Theorie der hyperkomplexen Systeme bedeutet dies, daß die Voraussetzung des Doppelkettensatzes durch die schwächere der Minimalbedingung allein ersetzt werden kann; O besitzt auch dann ein nilpotentes Radikal R , O/R ist halbeinfach. *G. Köthe*.

Akizuki, Yasuo: Zur Idealtheorie der einartigen Ringbereiche mit dem Teilerkettensatz. III. Jap. J. Math. 15, 1—11 (1938).

Für die Definitionen vgl. dies. Zbl. 16, 387. Es werden Fälle besprochen, die der Voraussetzung der allgemeinen Sätze in I. und II. (vgl. dies. Zbl. 19, 2) nicht genügen. \mathfrak{R} sei primärer Integritätsbereich, der den Teilerkettensatz erfüllt, $\mathfrak{R}/\mathfrak{p}$ besitze 2 Elemente, $\chi(\mathfrak{p}^3)$ sei gleich 3. Zwei Fälle sind möglich: $\chi(\mathfrak{p}) = 2$ oder $\chi(\mathfrak{p}) = 3$. Im zweiten Fall gilt noch eine Gleichung $\mathfrak{p}^3 = \pi \mathfrak{p}^2$, im ersten Fall aber nicht. Ein Integritätsbereich aus dem Körper $R\left(\sqrt{\frac{7 + \sqrt{57}}{2}}\right)$ hat als Quotientenring nach einem

Ideal diese Struktur. Ferner wird gezeigt, daß ein solches \mathfrak{R} mit $\chi(\mathfrak{p}^3) = 3$, $\chi(\mathfrak{p}) = 2$ durch Adjunktion zweier ganzer quadratischer Elemente in den zu \mathfrak{R} gehörigen ganz abgeschlossenen Ring übergeht. *G. Köthe* (Münster).

Rinehart, R. F.: Commutative algebras which are polynomial algebras. Duke math. J. 4, 725—736 (1938).

Der Verf. betrachtet über einem separablen Körper F eine assoziative und kommutative Algebra A , also einen kommutativen Oberring von F , der nur endlich viele über F linear unabhängige Elemente enthält. A heißt „polynomial algebra“, wenn sich alle Elemente aus A als Polynome in einem festen Element z mit Koeffizienten aus F darstellen lassen, d. h., anders ausgedrückt, wenn A über F ein „primitives Element“ z besitzt. Für die Existenz eines derartigen primitiven Elements werden, zum Teil mit Hilfe der Theorie der Diskriminantenmatrix, mehrere nicht allzu tief liegende, notwendige und hinreichende Bedingungen hergeleitet. Besondere Aufmerksamkeit wird dabei dem Fall gewidmet, daß F nur aus endlich vielen Elementen besteht. Zum Schluß wird durch einige Gegenbeispiele gezeigt, daß die von vornherein vorausgesetzte Separabilität von F für die Ergebnisse wesentlich war. *Krull* (Bonn).

Dribin, D. M.: Prüfer ideals in commutative rings. Duke math. J. 4, 737—751 (1938).

Die Arbeit befaßt sich mit einer Verallgemeinerung der bahnbrechenden Prüferschen Arbeit „Untersuchungen über die Teilbarkeitseigenschaften in Körpern“ (dies. Zbl. 4, 340): Prüfer geht von einem Integritätsbereich g mit dem Quotientenkörper \mathfrak{K} aus und definiert den Begriff des „ganzen Elements“ und des „Ideals“ in \mathfrak{K} mit Hilfe von g . Dribin betrachtet drei Integritätsbereiche \mathfrak{R} , g , \mathfrak{o} , wobei g in \mathfrak{R} , \mathfrak{o} in g ent-

halten ist. Der Quotientenkörper \mathfrak{K} von \mathfrak{R} tritt nicht in Erscheinung, die Untersuchung bleibt auf die Elemente von \mathfrak{R} selbst beschränkt. Der Ganzheitsbegriff wird mit Hilfe von \mathfrak{g} , der Idealbegriff mit Hilfe von \mathfrak{o} festgelegt. Die Dribinsche Arbeit schließt sich eng an das maßgebende Prüfersche Vorbild an. Doch hat der Ref. den Eindruck, daß der Verf. stellenweise die eigentliche Bedeutung der richtungweisenden Gedanken Prüfers nicht voll erfaßt hat. Das scheint vor allem in der letzten Nummer der Arbeit der Fall zu sein, wo an Stelle der schönen Prüferschen Funktionalringkonstruktion eine äußerlich ähnliche und formell sogar wesentlich einfachere Konstruktion angegeben wird, die aber schon in ganz einfachen Fällen, z. B. bei den Hauptordnungen der endlichen algebraischen Zahlkörper, praktisch kaum brauchbar sein dürfte.

Krull (Bonn).

Nowlan, F. S., and G. C. Webber: Sets of integral elements of certain rational division algebras. II. Trans. Roy. Soc. Canada, III. s. 32, 89—123 (1938).

Sei Z der kubische Teilkörper des 9ten Kreiskörpers und

$$L = Z(u) \text{ mit } u^3 = \delta \text{ (ganzrational) und } uZu^{-1} = Z'$$

eine von Z zerfallte kubische Divisionsalgebra. Über die Bedingung hinaus, daß D nullteilerfrei ist (der kubische Kern von δ enthält mindestens eine Primzahl $\neq 3$, die kubischer Nichtrest mod. 9 ist) wurde in Teil I [Trans. Roy. Soc. Canada, III. s. 31 (1937); dies. Zbl. 18, 103] vorausgesetzt, daß der zu 3 prime Bestandteil von δ selbst kubischer Nichtrest mod. 9 ist. Dann gab es genau eine Maximalordnung von D , die die Maximalordnung von Z und den Operator u enthält. — Im vorliegenden Teil II wird der Fall behandelt, daß δ kubischer Rest mod. 9 ist. Dann gibt es drei derartige Maximalordnungen. Sie werden explizit bestimmt.

Hasse (Göttingen).

Eichler, M.: Allgemeine Kongruenzklasseneinteilungen der Ideale einfacher Algebren über algebraischen Zahlkörpern und ihre L -Reihen. J. reine angew. Math. 179, 227—251 (1938).

Let $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}/K$ be a normal simple algebra, of degree n over the algebraic number field K , which is not a total definite quaternion algebra over K , that is, if u denotes the product of the infinite prime spots of K which are ramified in \mathfrak{A} , then either $n > 2$ or u does not contain all infinite prime spots of K [cf. Eichler, Math. Z. 43, 481—494 (1938); this Zbl. 18, 202]. First, the author studies congruence classes of the ideals of \mathfrak{A} , analogous to the ray classes etc. in the class field theory, and obtains an equivalence criterion in terms of norms which is a generalization of that in his earlier paper (l. c.). Second, he proves the following "norm theorem for arithmetical progressions": If \mathfrak{F}_1 is a maximal order of \mathfrak{A} , \mathfrak{F}_{11} an integral two-sided \mathfrak{F}_1 -ideal, and if α and b are numbers in \mathfrak{F}_1 and K , resp., such that $b \equiv n(\alpha) \pmod{\mathfrak{F}_{11}}$, $b \equiv n(\alpha) \equiv 1 \pmod{u}$, then \mathfrak{F}_1 contains a number β such that $\beta \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{F}_{11}}$, $n(\beta) = b$. The dot denotes multiplicative congruence (as below) and $n(\cdot)$ is the reduced norm relative to K . This theorem yields as corollaries the Hasse-Schilling norm theorem (this Zbl. 14, 6); the known equivalence criteria for the ideals of \mathfrak{A} , including those mentioned above; and the theorem that the Euclidean algorithm holds in every maximal order of \mathfrak{A} if it holds in $K \pmod{u}$. The converse of this last theorem is conjectured to be false. Finally, the author obtains two functional equations for the L -series of the congruence classes. These yield conductor formulas; an identity for hypercomplex Gaussian sums; and the result that the zeta-functions of the classes of the same congruence classification have the same residue at $s = 1$, which gives information concerning the unit groups of different maximal orders. To define the congruence classes, the author proceeds as follows. Each of the totality of ideals $\mathfrak{F}_{11}, \mathfrak{F}_{22}, \dots$, with maximal orders $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \dots$, and the same norm $n(\mathfrak{F}_{11}) = n(\mathfrak{F}_{11}) = \dots$, is uniquely determined by \mathfrak{F}_1 and the norm. Let \mathfrak{F} denote this ideal system, writing $\mathfrak{F}_v = \mathfrak{F}_1 \mathfrak{F} = \mathfrak{F} \mathfrak{F}_v$, $n(\mathfrak{F}) = n(\mathfrak{F}_v)$, etc. If \mathfrak{F} is an integral ideal system, an ideal \mathfrak{N}_{12} is said to be prime to \mathfrak{F} if $\mathfrak{N}_{12}^p = \mathfrak{F}_1^p$ (p -components) for each prime ideal p of K which divides $n(\mathfrak{F})$.

The totality of ideals of \mathfrak{A} prime to \mathfrak{F} and having the same p -components for all such p is a sub-groupoid $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ of the Brandt groupoid of ideals of \mathfrak{A} . If α is an element of \mathfrak{A} , write $\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}}$ (multiplicative congruence) in case there exist β and γ in \mathfrak{F}_1 , prime to \mathfrak{F} and such that $\alpha = \beta^{-1}\gamma$, $\beta \equiv \gamma \pmod{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}}$. Finally two ideals $\mathfrak{N}_{i_1 i_2}$ and $\mathfrak{N}_{i_3 i_4}$ are said to be equivalent mod \mathfrak{F} if $\sigma_{i_1} \mathfrak{N}_{i_1 i_2} \sigma_{i_3} = \sigma_{i_3} \mathfrak{N}_{i_3 i_4} \sigma_{i_1}$, with $\sigma_{i_v} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}}$, $v = 1, \dots, 4$. If further $\mathfrak{F}_{i_1} = \mathfrak{F}_{i_3}$, they are said to be left equivalent mod \mathfrak{F} . The classes so obtained are the ray classes, left ray classes, resp., mod \mathfrak{F} . The equivalence criteria etc. are obtained from the theorem: If \mathfrak{F} is an integral ideal system in \mathfrak{A} , then \mathfrak{F} determines a divisor \mathfrak{f} in K (\mathfrak{f} is a factor of $u n(\mathfrak{F})$) such that an ideal in \mathfrak{A} is principal mod \mathfrak{F} if and only its norm is principal mod \mathfrak{f} . The ray classes in a sub-groupoid $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ form a ray class groupoid $\Sigma_{\mathfrak{F}}$. To obtain the more general congruence classes, the author employs lemmas on groupoids, the mapping $\mathfrak{N}_{ij} \rightarrow n(\mathfrak{N}_{ij})$ of $\Sigma_{\mathfrak{F}}$ on $\sigma_{\mathfrak{f}}$, where $\sigma_{\mathfrak{f}}$ is the ray class group mod \mathfrak{f} in K , and homomorphisms $\sigma_{\mathfrak{f}} \sim \pi_{\mathfrak{f}}$, where $\pi_{\mathfrak{f}}$ is an extended class group in K . A corresponding norm criterion for the extended classes is obtained.

Hull (British Columbia).

Pall, Gordon: On the factorization of generalized quaternions. Duke math. J. 4, 696—704 (1938).

Es werden folgende verallgemeinerte Quaternionen betrachtet: $t = t_0 + i_1 t_1 + i_2 t_2 + i_3 t_3$, wo die t_i die Zahlen eines imaginär quadratischen Körpers K durchlaufen und die i_α der folgenden Multiplikationstabelle genügen: $i_\alpha^2 = -A_{\alpha\alpha}$, $i_2 i_3 = -A_{23} + a_{11} i_1 + a_{12} i_2 + a_{13} i_3$, $i_3 i_2 = -A_{32} - a_{11} i_1 - a_{12} i_2 - a_{13} i_3$ ($i_1 i_3, \dots$ analog). Dabei ist $a = (a_{\alpha\beta})$ eine symmetrische Matrix über K von der Ordnung 3 und $A_{\alpha\beta}$ das algebraische Komplement von $a_{\alpha\beta}$. Ein Quaternion heißt ganzzahlig, wenn K der Bereich der ganzen Zahlen ist. Es sei $Q = t_0^2 + \sum A_{\alpha\beta} t_\alpha t_\beta$. Es wird nach der Anzahl der Rechtsteiler von ganzzahligen Quaternionen gefragt. Dabei zeigt es sich, daß diese Anzahl mit der Anzahl der Darstellungen der Zahl 1 durch eine gewisse Form aus dem Geschlecht von Q übereinstimmt. Besonders scharfe Ergebnisse erhält man, wenn das Geschlecht nur eine Klasse enthält.

Hofreiter (Wien).

Zahlentheorie:

Thébault, V.: Sur les nombres de Pythagore. Mathesis 52, 294—298 (1938).

Lambert, G.: Sur les nombres qui se reproduisent à la droite de certaines de leurs puissances. Mathesis 52, 232—234 et 278—282 (1938).

Untersuchung über die natürlichen Zahlen N , für die eine Potenz N^x ($x > 1$), im Zahlensystem mit der Basis B geschrieben (B eine beliebige ganze Zahl > 1), als Endziffern die Reihe der Ziffern aufweist, mit denen sich N in diesem Zahlensystem schreibt.

Bessel-Hagen (Bonn).

Feldheim, Ervin: Un problème de la théorie des nombres rattaché aux polynômes de Tschébycheff. Bull. Amer. Math. Soc. 44, 836—839 (1938).

Les polynomes $B_n(x) = (x + \sqrt{x^2 + 4})^{n+1} - (x - \sqrt{x^2 + 4})^{n+1} / 2^{n+1} \sqrt{x^2 + 4}$ $n = -1, 0, \dots$ vérifient diverses relations de récurrence, connues ou nouvelles, parmi lesquelles signalons $B_{4n} = B_{2n}^2 + B_{2n-1}^2 = (B_n^2 - B_{n-1}^2)^2 + (2B_n B_{n-1})^2 + B_{2n-1}^2$ et une analogue pour B_{4n+2} . Les nombres positifs $c_n = B_{2n}(2)$, $n = 0, 1, \dots$ sont les seules qui sont sommes de trois carrés, dont deux consécutifs et dont le carré est somme de deux carrés consécutifs, comme l'a. l'a démontré dans un autre travail (ce Zbl. 19, 52).

T. Popoviciu (Cernăuți).

Rohrbach, Hans: Einige neuere Untersuchungen über die Dichte in der additiven Zahlentheorie. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 48, Abt. 1, 199—236 (1939).

Verf. gibt einen zusammenfassenden systematisierenden Bericht über neuere Untersuchungen in der Theorie der additiven Zusammensetzung der natürlichen Zahlen aus Zahlen einer vorgegebenen Menge \mathfrak{A} von natürlichen Zahlen. Charakteristisch für diese Untersuchungen ist, daß von der arithmetischen Natur der Zahlen aus \mathfrak{A} abgesehen wird. Es wird nur der metrische Begriff der Dichte von \mathfrak{A} ins Auge gefaßt,

die durch $\alpha = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{x}$ erklärt ist, wo $A(x)$ die Anzahl der $a \leq x$ aus \mathfrak{A} bezeichnet; daneben tritt auch die Dichte im Großen von \mathfrak{A} auf, erklärt durch $\alpha^* = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{x}$. Sind

$\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_k$ Mengen von natürlichen Zahlen, so versteht man unter ihrer Summe $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}_1 + \dots + \mathfrak{A}_k$ die Menge der Zahlen $c = \varepsilon_1 a_1 + \dots + \varepsilon_k a_k$ mit $\varepsilon_k = 0$ oder 1 und a_k aus \mathfrak{A}_k ; sind alle $\mathfrak{A}_k = \mathfrak{A}$, so wird $\mathfrak{A}_1 + \dots + \mathfrak{A}_k = k\mathfrak{A}$ gesetzt. \mathfrak{A} heißt von endlicher Ordnung h , wenn $h\mathfrak{A}$ die Menge aller natürlichen Zahlen und dabei h minimal ist; \mathfrak{A} heißt von endlicher Ordnung im Großen h^* , wenn $h^*\mathfrak{A}$ die Menge aller natürlichen Zahlen bis auf endlich viele Ausnahmen und h^* dabei minimal ist. Der dem Schnirelmannschen Beweis zum Goldbachproblem zugrundeliegende allgemeine Zusammenhang zwischen Dichte und Ordnung läßt sich dann in den folgenden beiden Hauptsätzen aussprechen: I. Ist α positiv, so ist h endlich. II. Ist α^* positiv und sind die Zahlen aus \mathfrak{A}^* insgesamt teilerfremd, so ist h^* endlich. Der Beweis beruht auf unteren Abschätzungen für die Dichte γ einer Summe $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ durch die als positiv vorausgesetzten Dichten α, β der Summanden $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, wie sie von Landau, I. Schur, Khintchine, Besicovitch, A. Brauer gegeben wurden. Über diese grundlegenden Abschätzungen wird ausführlich, teils mit Beweisen, berichtet, und es werden systematisch die Grenzen festgestellt, bis zu denen man in Richtung auf die unbewiesene Vermutung $\gamma \geq \min(1, \alpha + \beta)$ mit den betrachteten elementaren Methoden gelangen kann. Zu einem Satz von Erdős, der eine untere Abschätzung von γ durch α für $\beta = 0$ gibt, wird das Analogon für Dichten im Großen bewiesen. Es folgt ein Bericht über die eigenen Untersuchungen des Verf., zu vorgegebener Ordnung h eine Minimalbasis \mathfrak{A} zu bestimmen, d. h. eine Menge \mathfrak{A} der Ordnung h mit möglichst kleiner Anzahlfunktion $A(x)$. Zum Schluß werden Resultate zusammengestellt, die sich auf die Angabe der Dichten einer Reihe von speziellen Mengen \mathfrak{A} beziehen. Hasse (Göttingen).

Corput, J. G. van der: Contribution à la théorie additive des nombres. III a. IV. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 41, 442—453 a. 556—567 (1938).

In Teil II (dies. Zbl. 18, 345) war für jedes Polynom $\psi(x) = bx^g + \dots$ ($b > 0$) mit ganzen Koeffizienten für fast alle $t \geq 4$, für die $t - \psi(0)$ zum größten gemeinsamen Teiler aller $\psi(x) - \psi(0)$ teilerfremd ist, die Anzahl der Zerfällungen

$$t = p + \psi(x) \quad (p \text{ Primzahl})$$

unter Verwendung zweier ganzzahligen Parameter $m > 0$ und ν asymptotisch dargestellt worden, wofern $\nu > 2^{g-2}(3mg + 2m + 2g)$ war. Durch Verschärfung des entscheidenden Hilfssatzes aus dem Gebiet der diophantischen Approximationen wird nun zunächst dieselbe Darstellung auch unter der für $g > 2$ schwächeren Voraussetzung

$$\nu > 3mg + 2m + 2g \quad (1)$$

bewiesen, ebenso die damals hergeleitete asymptotische Darstellung für die Anzahl der Ausnahmewerte $\leq N$: für $N \geq 3$ ist diese Zahl kleiner als $cN \log^{-m} N$, wo c nur von m, ν und dem Polynom $\psi(x)$ abhängt. — Die ganze Betrachtung wird dann aber dahin verallgemeinert, daß $\psi(x)$ nur noch ganzzwertig zu sein braucht und nach den Zerfällungen

$$t = Kp + \psi(x)$$

gefragt wird, wo K eine gegebene natürliche Zahl ist und die Primzahl p einer gegebenen arithmetischen Progression $p \equiv u \pmod{U}$ angehören soll (u zu U teilerfremd). Mittels des Wertevorrats von $\psi(x)$ wird dann auf elementar-arithmetische Weise auch hier wieder ein aus vollen Restklassen natürlicher Zahlen bestehender Bereich E abgegrenzt, für dessen Zahlen ein ähnlicher Satz wie vorher gilt: Zunächst hat fast jede Zahl von E die verlangte Gestalt, und für jede natürliche Zahl m ist die Anzahl der Ausnahmewerte $\leq N$ im Falle $N \geq 3$ kleiner als $cN \log^{-m} N$, wo c nur von m, K, U und dem Polynom $\psi(x)$ abhängt. Zu je zwei ganzen Zahlen $m > 0$ und ν mit (1) wird auch für fast alle Zahlen t von E wieder für die Anzahl der Darstellungen von t in der erwähnten Gestalt eine ganz entsprechende asymptotische Darstellung

wie im vorausgegangenen Sonderfall gegeben, und auch diese wird im Falle $N \geq 3$ nur für weniger als $cN \log^{-m} N$ Zahlen $\leq N$ falsch, wo c nur von m, v, K, U und dem Polynom $\psi(x)$ abhängt.

W. Weber (Berlin).

Hua, Loo-Keng: On Tarry's problem. Quart. J. Math., Oxford Ser. 9, 315—320 (1938).

Ist $M(k)$ der kleinste Wert von s derart, daß die Bedingungen $(1 \leq h \leq k)$

$$a_1^h + \dots + a_s^h = b_1^h + \dots + b_s^h, \quad a_1^{h+1} + \dots + a_s^{h+1} \neq b_1^{h+1} + \dots + b_s^{h+1}$$

Lösungen in positiven ganzen Zahlen besitzen (vgl. hierzu E. M. Wright, dies. Zbl. 13, 199 u. 390; 16, 391), so wird gezeigt:

$$M(k) \leq (k+1) \left(\left\lceil \frac{\log \frac{1}{2}(k+2)}{\log(1+1/k)} \right\rceil + 1 \right).$$

Der Beweis benutzt nur elementare Abschätzungen. Verf. weist noch darauf hin, daß er unter Benutzung eines Satzes von Vinogradoff eine schärfere Aussage erhalten könne.

Rohrbach (Göttingen).

Ricci, Giovanni: Alcuni recenti risultati intorno alla congettura di Goldbach. (Firenze, 1.—3. IV. 1937.) Atti 1. Congr. Un. Mat. Ital. 158—160 (1938).

Zusammenstellung der numerischen Resultate, die in Richtung auf die Goldbachsche Vermutung von Brun, Rademacher, Estermann und Verf. beim Brunschen Satz und von Schnirelmann, Romanoff, Heilbronn-Landau-Scherk und Verf. beim Schnirelmannschen Satz gewonnen wurden.

Rohrbach (Göttingen).

Romanoff, N. P.: Bestimmung des quadratischen Mittelwertes der Fundamentalfunktion der additiven Zahlentheorie. Mitt. Forsch.-Inst. Math. u. Mech. Univ. Tomsk 2, 13—36 u. deutsch. Zusammenfassung 37 (1938) [Russisch].

Sind $n, k_1, k_2, x_1, x_2, \dots, x_k, y_1, y_2, \dots, y_k$ natürliche Zahlen mit

$$1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_k \leq n, \quad 1 \leq y_1 < y_2 < \dots < y_k \leq n, \quad (1)$$

so sei $f(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_k; n)$ die Anzahl aller Zahlen z mit $1 \leq z \leq n$, die entweder einem x_i oder einem y_j oder einem $x_i + y_j$ gleich sind. Für natürliches p sei

$$S_{k_1, k_2}^{n, p} = \sum f^p(x_1, \dots, x_{k_1}; y_1, \dots, y_{k_2}; n), \quad S_{k_1, k_2}'^{n, p} = \sum' f^p(x_1, \dots, x_{k_1}; y_1, \dots, y_{k_2}; n);$$

dabei wird in Σ über alle Systeme der x_i, y_j mit (1) summiert, in Σ' [hier und später in (2)] nur über diejenigen mit $x_i + y_j \neq n+1$ ($1 \leq i \leq k_1, 1 \leq j \leq k_2$); endlich sei

$$\Phi_{n, p}(u, v) = \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} S_{k_1, k_2}^{n, p} u^{k_1} v^{k_2}, \quad \Phi_{n, p}'(u, v) = \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} S_{k_1, k_2}'^{n, p} u^{k_1} v^{k_2}.$$

Das Hauptziel der Arbeit ist, $S_{k_1, k_2}^{n, 2}$, d. h. $\Phi_{n, 2}$ zu berechnen. Da sich $\Phi_{n, 2}$ durch $\Phi_{m, 1}$ und $\Phi_{m, 1}'$ ($0 < m < n$) ausdrücken läßt (analoges gilt auch für allgemeines p), und da Verf. bereits früher (dies. Zbl. 17, 199) $\Phi_{n, 1}$ berechnet hat, so ist die Hauptaufgabe, $\Phi_{n, 1}$ zu berechnen, was durch elementare, aber komplizierte kombinatorische Überlegungen geleistet wird. Es folgt noch der Satz: Ist auch noch k_3 eine natürliche Zahl, so ist der Ausdruck

$$\sum_{k_3} \left(n - f(x_1, \dots, x_{k_1}; y_1, \dots, y_{k_2}; n) \right) \quad (2)$$

symmetrisch in den drei Größen k_1, k_2, k_3 .

Jarník (Praha).

Erdős, Paul: On sequences of integers no one of which divides the product of two others and on some related problems. Mitt. Forsch.-Inst. Math. u. Mech. Univ. Tomsk 2, 74—82 (1938).

The author defines an A sequence of integers as a sequence such that no member divides the product of any two other members. The number of integers less than n belonging to such a sequence is less than $\pi(n) + O\left(\frac{n^{\frac{1}{2}}}{\log n}\right)^2$. The number of integers less than n and belonging to a sequence such that the product of any two members is different from any other such product is less than $\pi(n) + O(n^{\frac{1}{2}})$. The error term in the latter formula cannot be better than $O(n^{3/4}(\log n)^{-3/2})$. It follows that, if $p_1 < p_2 < \dots < p_s \leq n$ is an

arbitrary sequence of primes such that $z > (c_1 n \log \log n) (\log n)^{-2}$, where c_1 is a sufficiently large constant, then the products $(p_i - 1)(p_j - 1)$ cannot all be different.
Wright (Aberdeen).

Cramér, Harald: On the order of magnitude of the difference between consecutive prime numbers. *Prace mat.-fiz.* 45, 51—74 (1937).

A heuristic method based on probability arguments makes it appear likely that the difference of consecutive primes satisfies

$$p_{n+1} - p_n = O((\log p_n)^2).$$

Next certain results are shown to follow from the Riemann hypothesis; these assert that the frequency of primes such that $p_{n+1} - p_n$ is larger than $f(p_n)$, where $f(p_n)$ increases more rapidly than $(\log p_n)^2$, is small. In particular, under this hypothesis, if $S(x) = \sum_{p_n \leq x} (p_{n+1} - p_n)$ and $S_1(x)$ denotes the same sum taken over those p_n for which

$p_{n+1} - p_n > (\log p_n)^3$, then $S(x) \sim x$, while

$$S_1(x) = O\left(\frac{x}{\log \log x}\right); \quad \text{also} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(p_{n+1} - p_n)^2}{p_n (\log p_n)^\lambda}$$

converges for $\lambda > 4$.

Wright (Aberdeen).

Koksma, J. F.: Anwendung des Perronschen Beweises eines Satzes von Minkowski. *Math. Ann.* 116, 464—468 (1939).

Es wird folgender Satz bewiesen: Genügen zwei reelle Zahlen θ und ϑ für jeden Gitterpunkt $(x, y) \neq (0, 0)$ den Bedingungen $\theta x - y \neq 0$, $y \neq \vartheta$, $\theta x - y - \vartheta \neq 0$, so gibt es unendlich viele Gitterpunkte (x, y) mit $x \neq 0$, so daß

$$|x(\theta x - y - \vartheta)| < \frac{1}{4}. \quad (1)$$

Mit Hilfe der Beweismethode von Perron (s. dies. Zbl. 19, 7) wird gezeigt, daß es Gitterpunkte (x_n, y_n) gibt, die (1) und die Ungleichung $|q_n(\theta x_n - y_n - \vartheta)| \leq 1$ befriedigen. Dabei sei p_n/q_n ein Näherungsbruch von θ . Aus der letzteren Ungleichung folgt sofort, daß es unendlich viele verschiedene unter diesen Gitterpunkten gibt.

Edmund Hlawka (Wien).

Heinhold, Joseph: Verallgemeinerung und Verschärfung eines Minkowskischen Satzes. *Math. Z.* 44, 659—688 (1939).

Es sei vorgelegt eine quadratische Form $ax^2 + 2bxy + cy^2$ mit reellen Koeffizienten und es bezeichne $\varphi(a, b, c)$ die untere Grenze aller C^2 von der folgenden Eigenschaft: Zu zwei beliebigen Zahlen μ, ν gibt es immer modulo 1 kongruente Zahlen $x \equiv \mu$, $y \equiv \nu$, so daß

$$|ax^2 + 2bxy + cy^2| \leq C^2.$$

Für indefinite Formen hat schon Minkowski (Diophantische Approximationen. Leipzig 1907. S. 42ff.) bewiesen, daß $\varphi(a, b, c) \leq \frac{1}{2} \sqrt{b^2 - ac}$ ist. Dieses Resultat wird vom Verf. verschärft und verallgemeinert. Für definite Formen wird sogar bewiesen: Unter Voraussetzung von $0 \leq |b| < a$, $|b| < c$ (was keine Einschränkung bedeutet) ist

$$\varphi(a, b, c) = \frac{ac}{4} \cdot \frac{a + c - 2|b|}{ac - b^2}.$$

Für indefinite Formen wird bewiesen: Es genügt, die Fälle $a = 1 - l^2$, $b = l + m$, $c = m^2 - 1$ mit $0 \leq l \leq 1$, $0 \leq m \leq 1$, und $a = (1 + l)^2$, $b = (1 + l)m$, $c = m^2 - 1$ mit $0 \leq l \leq m \leq 1$ zu betrachten, und dann ist

$$\varphi(1 - l^2, l + m, m^2 - 1) \leq \frac{1}{4} \text{Max}[(l + m)(2 - |l - m|); 1 - l^2; 1 - m^2],$$

$$\varphi((1 + l)^2, (1 + l)m, m^2 - 1) \leq \frac{1}{4}(1 + l)^2.$$

Die Beweise werden mittels der geometrischen Methode von Minkowski geführt. Im letzten Paragraphen wird der Zusammenhang mit der Frage nach der Existenz des Euklidischen Algorithmus in quadratischen Zahlkörpern behandelt. T. Nagell.

Hajós, Georg: Bedeckung mehrdimensionaler Räume mit Würfelgittern. *Mat. fiz. Lap.* 45, 171—190 u. deutsch. Zusammenfassung 190 (1938) [Ungarisch].

Eine Vermutung von Minkowski über homogene lineare Formen ist äquivalent

mit der folgenden geometrischen Vermutung, bewiesen bisher nur für $n \leq 7$ [vgl. Koksma, Diophantische Approximationen. Erg. d. Math. 4, 15—16 (1936)]: Ein den n -dimensionalen Raum R_n einfach bedeckendes Würfelgitter enthält immer zwei an einer ganzen Seitenfläche aneinanderstoßende Würfel. Dabei ist unter einem Würfelgitter ein System kongruenter, parallel liegender, n -dimensionaler Würfel gemeint, deren Mittelpunkte ein Punktgitter bilden. — Verf. betrachtet nun Würfelgitter, die R_n k -fach überdecken, und beweist, daß die der obigen entsprechende Vermutung in diesem Falle dann und nur dann falsch ist, wenn es eine endliche Abelsche Gruppe G , darin n Elemente A_1, A_2, \dots, A_n und ferner n positive ganze Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ derart gibt, daß α_i kleiner als die Ordnung von A_i ist und daß das Produkt der Summen $1 + A_i + A_i^2 + \dots + A_i^{\alpha_i-1}$ (in der Gruppenalgebra) gleich dem k -fachen der Summe aller Elemente von G ist. — Es wird nun gezeigt, daß es im Falle $n \leq 3$ für kein k eine solche Gruppe gibt. Im Falle $n \geq 4$ dagegen gibt es Zahlen $k = k(n)$ derart, daß Gruppen der genannten Eigenschaft existieren (im Falle $n = 4$ z. B. mit $k = 9$). Sz. Nagy (Szeged).

Segal, B.: A new type of diophantic approximations. C. R. Acad. URSS, N. s. 19, 667—670 (1938).

Approximations of complex numbers $N_1 + N_2 i$ by sums of the form

$$\sum_{\lambda=1}^r x_{\lambda}^{a+b i}(x_1, x_2, \dots, x_r \text{ integers, } a > 1, b \neq 0)$$

based upon theorems due to Vinogradoff and van der Corput about trigonometrical sums of the form

$$\sum_{A \leq x \leq B} e^{2\pi i f(x)} \quad J. F. Koksma \text{ (Amsterdam).}$$

Wachs, S.: Démonstration d'un théorème de Fermat. Bull. Soc. Math. France 66, 164—170 (1938).

Der Verf. beweist die folgende Behauptung von Fermat: Die diophantische Gleichung

$$(2x^2 - 1)^2 = 2y^2 - 1$$

besitzt außer $x = y = 1$ und $x = 2, y = 5$ keine anderen Lösungen in positiven ganzen Zahlen x und y . Einen etwas kürzeren Beweis dieses Satzes hat aber schon Genocchi gefunden [Nouvelles Ann. (3) 2, 306—310 (1885)]. T. Nagell (Uppsala).

Morimoto, Seigo: Zur Theorie der Approximation einer irrationalen Zahl durch rationale Zahlen. Tôhoku Math. J. 45, 177—187 (1938).

Setzt man für reelles irrationales α und reelles $t > 0$

$$\varphi_{\alpha}(t) = \min_{\substack{1 \leq x < t \\ x \text{ und } y \text{ ganz}}} |(\alpha x - y)t|; \quad I_{\alpha} = \liminf_{t \rightarrow \infty} \varphi_{\alpha}(t); \quad S_{\alpha} = \limsup_{t \rightarrow \infty} \varphi_{\alpha}(t),$$

so gilt nach Morimoto [Proc. Phys.-Math. Soc. Jap. 10, 171—174 (1928)]

$$\frac{1 + I_{\alpha}}{2} \leq S_{\alpha} \leq \frac{1 + \sqrt{1 - 4I_{\alpha}}}{2}. \quad (1)$$

Aus zahlengeometrischen Untersuchungen von Szekeres folgt

$$S_{\alpha} \geq \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{5}}}{2} \quad (2)$$

(dies. Zbl. 16, 368), ein Ergebnis, das in (1) nicht enthalten ist. Mit Hilfe der regelmäßigen Kettenbruchdarstellung von α untersucht nun Verf. S_{α} näher und findet (2), sowie ähnliche Abschätzungen wie für I_{α} zuerst von Hurwitz mit der Markoffschen Methode hergeleitet wurden [Lit. im Bericht des Ref., Diophantische Approximationen. Erg. d. Math. 4, 4 (1936)]. J. F. Koksma (Amsterdam).

Jarník, Vojtěch: Über einen Satz von A. Khintchine. II. Mitt. Prace mat.-fiz. 45, 1—22 (1937).

Identisch mit der in dies. Zbl. 15, 294 referierten Arbeit (vgl. dies. Zbl. 13, 53). Koksma (Amsterdam).

Jones, Burton W.: The reduction of positive quaternary quadratic forms. *Ann. of Math.* II. s. 40, 92—119 (1939).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 9, 298) hat der Verf. die Sellingsche Reduktionsmethode auf positive Formen mit 4 Variablen verallgemeinert. Nun wird verlangt, daß in jeder Klasse von quadratischen Formen genau eine Form liegt. Die Bedingungen und erst recht die Nachweise sind sehr langwierig. Zuletzt werden die Automorphismen von positiven quaternären quadratischen Formen aufgestellt. *Hofreiter (Wien).*

Gruppentheorie.

Baer, Reinhold: Groups with abelian central quotient group. *Trans. Amer. Math. Soc.* 44, 357—386 (1938).

Es sei \mathfrak{S} eine Untergruppe des Zentrums der Gruppe \mathfrak{G} , so daß die Faktorgruppe $\mathfrak{G}^* = \mathfrak{G}/\mathfrak{S}$ abelsch ist. Auf \mathfrak{G}^* wird durch die Festsetzung $x^* \circ y^* = xyx^{-1}y^{-1}$ eindeutig ein Kreisprodukt mit Werten aus \mathfrak{S} erklärt, das den Regeln $x^* \circ x^* = (x^* \circ y^*)(y^* \circ x^*) = 1$, $x^* \circ y^* z^* = (x^* \circ y^*)(x^* \circ z^*)$ genügt, ferner eindeutig eine Potenzfunktion $P(n, x^*) = \mathfrak{S}^n x^n$ mit Werten aus der Faktorgruppe von \mathfrak{S} nach der Gruppe \mathfrak{S}^n der n -ten Potenzen erklärt, welche den Rechenregeln genügt: (1) $P(n, x^* y^*) = P(n, x^*) \cdot P(n, y^*)$, sobald x^* und y^* aus der Gruppe \mathfrak{G}_n^* aller Elemente aus \mathfrak{G}^* , deren n -te Potenz 1 ist, stammt und n ungerade ist; ferner

$$P(2m, x^* y^*) = (x^* \circ y^*)^m P(2m, x^*) \cdot P(2m, y^*), \text{ wenn } x^*, y^* \text{ in } \mathfrak{G}_{2m}^* \text{ liegen,} \quad (2)$$

$$P(n m, x^*) \equiv P(n, x^*)^m \pmod{\mathfrak{S}^{nm}}, \text{ wenn } x^* \text{ in } \mathfrak{G}_n^* \text{ liegt;} \quad (3)$$

$$P(n, x^{*m}) = \mathfrak{S}^n P(n m, x^*), \text{ wenn } x^* \text{ in } \mathfrak{G}_{nm}^* \text{ liegt.}$$

Wenn umgekehrt auf einer abelschen Gruppe \mathfrak{G}^* ein Kreisprodukt mit Werten aus einer zweiten abelschen Gruppe \mathfrak{S} eindeutig erklärt ist, das den obigen Regeln genügt, so läßt sich stets eine Potenzfunktion finden, die den Regeln (1)—(3) genügt, und es gibt eine Erweiterungsgruppe \mathfrak{G} von \mathfrak{S} mit \mathfrak{S} im Zentrum, eine isomorphe Abbildung γ von $\mathfrak{G}/\mathfrak{S}$ auf \mathfrak{G}^* von der Art, daß

$$(\delta x)^\gamma \circ (\delta y)^\gamma = x y x^{-1} y^{-1}, \quad P(n, (\delta x)^\gamma) = \delta^n x^n.$$

Ferner werden Faktorsysteme betrachtet, Isomorphiebedingungen aufgestellt, Konformalitäten und Automorphismen betrachtet und in Anhängen 1. p -adische Gruppen, 2. Konformalitäten, die Automorphismen in Automorphismen transformieren, 3. Gruppen mit Operatoren untersucht. *Zassenhaus (Hamburg).*

Baer, Reinhold: Groups with preassigned central and central quotient group. *Trans. Amer. Math. Soc.* 44, 387—412 (1938).

Es werden die hinreichenden und notwendigen Bedingungen angegeben, wann eine metabelsche Gruppe \mathfrak{G} existiert, deren Zentrum isomorph zu der abelschen Gruppe \mathfrak{A} und deren Faktorgruppe nach dem Zentrum isomorph zu der abelschen Gruppe \mathfrak{B} ist (Existenzsatz), ferner, wann im Sinne der Isomorphie die Gruppe \mathfrak{G} eindeutig bestimmt ist (Einzigkeitssatz). Für den Existenzsatz wird noch zusätzlich vorausgesetzt, daß \mathfrak{B} direktes Produkt von endlich oder unendlich vielen zyklischen Gruppen ist. Für den Einzigkeitssatz wird vorausgesetzt, daß \mathfrak{B} sich aus endlich vielen Elementen erzeugen läßt. Die 6 Bedingungen des Existenzsatzes und die 8 Bedingungen des Einzigkeitssatzes sind Aussagen über den Rang von charakteristischen Untergruppen oder Faktorgruppen zwischen ihnen von \mathfrak{A} und \mathfrak{B} . Die Konstruktionen werden auf den in der vorhergehenden Arbeit (Groups with abelian central quotient group) gegebenen Grundlagen aufgebaut. *Zassenhaus (Hamburg).*

Zorn, Max: Discontinuous groups and allied topics. III: On a lemma about matrices. *Duke math. J.* 4, 788—792 (1938).

Es sei \mathfrak{A} eine Menge von n -reihigen quadratischen Matrizen mit reellen Elementen derart, daß mit zwei Matrizen A und B auch $aA + bB$ zu \mathfrak{A} gehören, wenn a, b beliebige reelle Zahlen sind. Mit jeder Matrix A soll auch ihre Transponierte und, falls

sie existiert, auch ihre Inverse in \mathfrak{A} enthalten sein, und schließlich soll \mathfrak{A} mindestens eine unimodulare Matrix enthalten. Dann gilt: Die Gesamtheit \mathfrak{M} der in \mathfrak{A} enthaltenen unimodularen Matrizen bildet einen (eventuell nur aus einzelnen Punkten bestehenden) im kleinen zusammenhängenden euklidischen Teilraum des Raumes von n^2 reellen Dimensionen. Ein zusammenhängender Teil dieses Raumes heißt eine Komponente von \mathfrak{M} , und es gilt: \mathfrak{M} enthält nur endlich viele Komponenten, und jede von diesen enthält mindestens eine orthogonale Matrix. (I., II. vgl. dies. Zbl. 13, 248).

Magnus (Frankfurt a. M.).

Grün, Otto: Gruppentheoretische Untersuchungen. Deutsche Math. 3, 547—555 (1938).

\mathfrak{G} sei eine endliche Gruppe mit der Ordnung g , m sei das k. g. V. der Ordnungen der Elemente von \mathfrak{G} . Der Verf. behauptet, daß die absolut irreduziblen Darstellungen von \mathfrak{G} sich schon im Körper der m -ten Einheitswurzeln geben lassen. Der angegebene Beweis ist aber nur eine Zurückführung des Satzes auf die noch unbewiesene Behauptung von Burnside, daß die Werte eines festen irreduziblen Charakters nicht alle durch dieselbe Primzahl teilbar sind. — Als Gruppenklasse nach der Untergruppe \mathfrak{U} wird jeder Ausdruck $\sum_i \sum_{U \in \mathfrak{U}} T_i(US) T_i^{-1} = \langle \mathfrak{U}S \rangle$ verstanden, wobei die T_i ein Rechtsvertretersystem nach dem Normalisator von $\mathfrak{U}S$ sind. Der von allen Gruppenklassen erzeugte k -Modul ist ein Ideal \mathfrak{u} des Zentrums des Gruppenringes von \mathfrak{G} über dem Körper k . Verf. vermutet, daß \mathfrak{u} gleich dem aus $\langle \mathfrak{U} \rangle$ erzeugten Ideal \mathfrak{u}' des Zentrums ist. Der Rang von \mathfrak{u}' ist gleich der Anzahl der verschiedenen irreduziblen Darstellungen von \mathfrak{G} , die in der von der 1-Darstellung von \mathfrak{U} induzierten Darstellung von \mathfrak{G} als Komponenten vorkommen. — In § 2 der Arbeit wird der Begriff der p -Normalität [s. J. reine angew. Math. 174, 1—14 (1935); dies. Zbl. 12, 341] verallgemeinert und auf eine Anwendung auf die Holomorphie einer endlichen Gruppe hingewiesen.

Zassenhaus (Hamburg).

Sigley, D. T.: The number of groups which involve a given number of unity congruences, and applications. Ann. of Math., II. s. 40, 81—91 (1939).

Es wird die Anzahl der abstrakt nichtisomorphen Gruppen mit quadratfreier Ordnung bestimmt, für deren Primfaktoren genau 4 Einskongruenzen bestehen. Ferner werden alle Ordnungen bestimmt, für die es genau 6 nichtisomorphe Gruppen gibt.

Zassenhaus (Hamburg).

Montgomery, Deane, and Leo Zippin: Compact Abelian transformation groups. Duke math. J. 4, 363—373 (1938).

A topological group G is called a transformation group of a space R if the elements of G may be considered as homeomorphisms $g(x)$ of R into itself so that $g(x)$ is continuous simultaneously in g and x and if $g = g_1 g_2$, then $g_1(x) = g_2[g_2(x)]$ for all x in R . Such a group is said to be effective provided that for any element g , not the identity, there is some point x with $g(x) \neq x$. The authors prove a number of results concerning compact transformation groups and their orbits in various euclidean and locally euclidean spaces, culminating in the theorem that any compact connected abelian group which acts effectively on euclidean 3-space is isomorphic with the rotation group of a circle.

Whyburn (Virginia).

Tannaka, Tadao: Über den Dualitätssatz der nichtkommutativen topologischen Gruppen. Tôhoku Math. J. 45, 1—12 (1938).

Die stetigen beschränkten Darstellungen D einer topologischen Gruppe \mathfrak{G} bilden eine Halbgruppe $\bar{\mathfrak{G}}$, in der 3 Operationen definiert sind: die Kroneckersche Komposition $D^{(1)} \times D^{(2)}$, die Transformation CDC^{-1} mit einer beliebigen Matrix C und die Summenbildung

$$\begin{pmatrix} D^{(1)} & 0 \\ 0 & D^{(2)} \end{pmatrix}$$

$\bar{\mathfrak{G}}$ heißt die Dualhalbgruppe zu \mathfrak{G} . Eine Darstellung A von $\bar{\mathfrak{G}}$ ist eine Zuordnung, die jeder Darstellung D eine Matrix $D \cdot A$ vom selben Grad wie D zuordnet, derart, daß

dem Produkt $D^{(1)} \times D^{(2)}$ das Produkt $D^{(1)} \cdot A \times D^{(2)} \cdot A$, der Transformierten CDC^{-1} die transformierte Matrix $C(D \cdot A)C^{-1}$, der Summe die Summe, und einer unitären Darstellung eine unitäre Matrix zugeordnet wird. Die Darstellungen von \mathfrak{G} bilden bei geeigneter Produkt- und Umgebungsdefinition eine topologische Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$. Diese ist bikompakt, und wenn \mathfrak{G} genügend viele fastperiodische Funktionen besitzt, so läßt sich \mathfrak{G} stetig isomorph und überall dicht in $\overline{\mathfrak{G}}$ einbetten. Ist \mathfrak{G} selbst bikompakt, so ist $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}$; das ist der Dualitätssatz für bikompakte Gruppen. Das Haupthilfsmittel beim Beweis bildet die Untersuchung der Primideale im Ring der fastperiodischen Funktionen auf \mathfrak{G} .
van der Waerden (Leipzig).

Mengenlehre und reelle Funktionen.

Sierpiński, Waclaw: Sur une relation entre deux conséquences de l'hypothèse du continu. *Fundam. Math.* 31, 227—230 (1938).

Verf. zeigt ohne Hilfe der Kontinuumshypothese, daß aus der Existenz einer Funktion, die auf einer linearen Menge von der Mächtigkeit des Kontinuums stetig, aber auf keiner abzählbaren Teilmenge gleichmäßig stetig ist, das Vorhandensein einer konvergenten Funktionenfolge folgt, die auf keiner abzählbaren Menge gleichmäßig konvergiert. Es wird auch bemerkt, daß diese Tatsache sich nicht umkehren läßt.

L. Egyed (Budapest).

Maker, Philip T.: The relation of perfect sets of measure zero to certain classes of functions. *Bull. Amer. Math. Soc.* 44, 846—849 (1938).

Folgende Verallgemeinerung eines Rademacherschen Satzes [*Mh. Math. Phys.* 27, 205 (1931)] wird bewiesen: Sei $f(x)$ eine Bairesche Funktion auf der abgeschlossenen Menge F . Ist die Urbildmenge eines jeden Punktes $y = f(x)$ außer höchstens einer Nullmenge von y abgeschlossen, so ist, damit das Bild $f(A)$ jeder meßbaren Menge $A \subset F$ ebenfalls meßbar sei, notwendig und hinreichend, daß für jede perfekte Nullmenge $P \subset F$ auch $f(P)$ eine Nullmenge sei. Dieses Resultat ergibt sich aus einem zu allgemein ausgesprochenen Satze des Verf., in welchem $f(x)$ auf einer beliebigen Menge M definiert ist, während im Beweis die Abgeschlossenheit von M ausgenutzt wird, was jedoch für das Folgende belanglos bleibt. Als Anwendung werden auch Sätze über gleichmäßig konvergente Folgen und kompakte Mengen von totalstetigen Funktionen bewiesen.

G. Alexits (Budapest).

Besicovitch, A. S.: On the fundamental geometrical properties of linearly measurable plane sets of points. III. *Math. Ann.* 116, 349—357 (1939).

L'A. prosegue lo studio della struttura di un insieme piano E dotato di una misura lineare LE , intesa come una „lunghezza“ [*Math. Ann.* 98, 422—464 (1928); 115, 296—329 (1938); questo *Zbl.* 18, 113]. — Se $E(a, r)$ è la porzione dei punti di E a distanza $\leq r$ dal punto a , le densità massima e minima di E in a sono i limiti massimo e minimo, per $r \rightarrow 0$, di $LE(a, r)/2r$. E è non regolare, se in quasi tutti i suoi punti (nel senso della misura lineare) una delle densità è diversa da 1. — Designata con (a, ϑ) la retta passante per a e inclinata di un angolo ϑ sull'asse x , a è di radiazione per E , se quasi tutte le (a, ϑ) sono d'accumulazione per rette (a, ϑ_0) incontranti E infinite volte nell'intorno di a , oppure tali che, fissati $q > 0$, $\varrho > 0$, $\varepsilon > 0$, esistano $0 < r < \varrho$, $\vartheta_1 < \vartheta_0 < \vartheta_2$, $\vartheta_2 - \vartheta_1 < \varepsilon$ per modo che la misura lin. della parte di E contenuta negli angoli formati da (a, ϑ_1) , (a, ϑ_2) e da $(a, \vartheta_1 + \pi)$, $(a, \vartheta_2 + \pi)$ riesca $> 2qr(\vartheta_2 - \vartheta_1)$. — L'A. dimostra che quasi tutti i punti di E sono di radiazione per esso, se E è non regolare; e che se E è altresì di misura finita, la sua proiezione su (a, ϑ) è nulla per quasi tutti i ϑ . Quest'ultimo risultato è di particolare rilievo. *G. Scorza Dragoni*.

Dickinson, D. R.: Study of extreme cases with respect to the densities of irregular linearly measurable plane sets of points. *Math. Ann.* 116, 358—373 (1939).

Per un insieme linearmente misurabile E , denotino $D^*\{a, (\vartheta_1, \vartheta_2), E\}$, $D_*\{a, (\vartheta_1, \vartheta_2), E\}$ le densità massima e minima della parte di E compresa nell'angolo formato da (a, ϑ_1)

e (a, ϑ_2) (ved. riassunto prec.). Se E è non regolare, per quasi tutti i suoi punti riesce $0 \leq D^*\{a, (\vartheta, \vartheta + \varphi), E\} \leq 1/2$, se $0 < \varphi \leq \pi/3$; $0 \leq D^*\{a, (\vartheta, \vartheta + \varphi), E\} \leq \sin \frac{1}{2}\varphi$, se $\pi/3 < \varphi < \pi$; $1/2 \leq D^*\{a, (\vartheta, \vartheta + \varphi), E\} \leq 1$, se $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$; $D_*\{a, (\vartheta, \vartheta + \varphi), E\} = 0$, se $\varphi \leq \pi$ [Besicovitch, Math. Ann. **115**, 296—329 (1938)]. Orbene, l'A. dimostra che esistono: 1° , un insieme non regolare per cui, per ogni φ e per convenienti ϑ , sono quasi ovunque raggiunti cinque dei limiti dati per $D^*\{a, (\vartheta, \vartheta + \varphi), E\}$ [un esempio per mostrare che anche il confine eccettuato, quello inferiore nel caso $\varphi > \pi$, può essere raggiunto si trova già in Besicovitch, Math. Ann. **98**, 422—464 (1928), § 11]; 2° , un insieme non regolare R in quasi tutti i punti del quale $D_*\{a, (\pi - \eta, 2\pi + \eta), R\} = 1/2$, $0 < \eta \leq \pi/2$; 3° , un insieme non regolare Q in tutti i punti del quale la densità minima è > 0 , mentre in quasi tutti $D_*\{a, (\eta, 2\pi - \eta), Q\} = 0$, $0 < \eta < \pi$.

G. Scorza Dragoni (Padova).

Marcinkiewicz, J.: Sur quelques intégrales du type de Dini. Ann. Soc. Polon. math. **17**, 42—50 (1938).

Es werden einige Ungleichungen über Integrale Dinischer Art gegeben. Verf. zeigt insbesondere, sich auf einige Sätze von Littlewood, M. Riesz, Pólya und Zygmund stützend, daß

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(x+t) + F(x-t) - 2F(x)|^p t^{-p-1} dt dx \leq C_p \int_0^{2\pi} |F'(t)|^p dt$$

ist, je nachdem $p \geq 2$ ist, falls F absolut stetig und $F' \in L^p$ ist. Karamata (Beograd).

Delange, Hubert: Sur les suites de polynomes dont les zéros ont une distribution régulière. C. R. Acad. Sci., Paris **207**, 205—207 (1938).

Soit $P_n(z) = A_n z^n + \dots$ une suite de polynomes de degré $n = 1, 2, \dots$. La distribution des zéros des P_n est dite régulière si la suite des fonctions d'ensemble

$$\psi_n(e) = \frac{\text{nombre des zéros de } P_n \subset e}{n}$$

est convergente vers une fonction limite $\psi(e)$. L'au. donne, sans démonstration, diverses relations entre les limites de $1/n \log |P_n(z)/A_n|$ et l'intégrale de Stieltjes

$$\int_E \log r d\psi(e),$$

E = dérivé de l'ensemble des zéros des P_n , r = distance de z à un point de E . En particulier, si E est borné, de mesure (superficielle) nulle, pour que $\sqrt[n]{|P_n(z)|}$ converge en dehors de E , il faut et il suffit que $\sqrt[n]{|A_n|}$ converge et que la sus-dite distribution soit régulière. Si E est borné et si la distribution est régulière, la série $\sum a_n P_n(z)$ converge en tout z où $\int_E \log r d\psi(e) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n A_n|} < 0$. T. Popoviciu (Cernăuți).

Jeffery, R. L.: The equivalence of sequence integrals and non-absolutely convergent integrals. Bull. Amer. Math. Soc. **44**, 840—845 (1938).

If $f(x)$ is measurable and finite almost everywhere on (a, b) , if $s_n(x)$ is a sequence of summable functions such that $s_n = f$ on a set E_n , $s_n = 0$ elsewhere, $E_n \supset E_{n-1}$, and $mE_n \rightarrow b - a$, and if $\int_a^x s_n dx$ tends to a continuous function $\varphi(x)$, then f is, by

definition, totally integrable in the sequence sense to $\varphi(x) = TS(f, a, x)$. Among other theorems the author shows: Let a $TS(f, a, x)$ exist on (a, b) . If for any closed set E on (a, b) , there is an interval (l, m) containing a part e of E such that f is summable over e , $\sum |\varphi(\alpha_i, \beta_i)|$ converges, and $\sum \varphi(\alpha_i, \beta_i) = \varphi[\sum (\alpha_i, \beta_i)]$, where (α_i, β_i) are the intervals complementary to e on (l, m) , then f is integrable in the generalized Denjoy sense and this $TS(f, a, x) = \int_a^x f dx$. Some examples illustrate the theorems.

Cf. Jeffery, Trans. Amer. Math. Soc. **41**; this Zbl. **16**, 158.

J. Ridder.

Analysis.

Allgemeines:

● Scheffers, Georg: *Lehrbuch der Mathematik, zum Selbstunterricht und für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik. Eine Einführung in die Differential- und Integralrechnung und in die analytische Geometrie.* 7. Aufl. Berlin: Walter de Gruyter 1938. VIII, 743 S. u. 438 Fig. RM. 15.—

Maxia, Angelo: *Su una classe di problemi di massimo e minimo.* Period. Mat., IV. s. 18, 237—248 (1938).

Caleagno, H. E.: *Versuch über eine Archimedische Analysis.* Bol. Mat. 11, 144—146 (1938) [Spanisch].

Man kann die komplexen Zahlen so anordnen, daß $A < B$ ist, wenn $|A| < |B|$, oder $|A| = |B|$ und $\arg A < \arg B$ ist; dann gilt das Archimedische Postulat.

Harald Geppert (Gießen).

Tchakaloff, Lubomir: *Sur quelques propriétés des développements de Taylor d'une certaine classe de fonctions.* (2. Congr. Interbalkan. des Math., Bucarest, 12. IX. 1937.) Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 40, Nr 1/2, 135—140 (1938).

Besitzt die reelle Funktion $f(x)$ die folgenden drei Eigenschaften: 1. $f^{(k)}(x)$ existiert im Intervall $(-\infty, r > 0)$ für jede positive ganze Zahl k , 2. $f^{(k)}(x) > 0$ an jeder Stelle $x < 0$, 3. $f(x)$ ist in eine konvergente Reihe $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$ entwickelbar, so hat die Funktion

$$f_p(x) = c_p + c_{p+1}x^{p+1} + c_{p+2}x^{p+2} + \dots$$

für jede ganze positive Zahl p dieselben Eigenschaften wie $f(x)$; und jedes Polynom $P_{p,n}(x) = c_p + c_{p+1}x^{p+1} + \dots + c_{p+n}x^n$ und jede seiner Derivierten $P'_{p,n}(x)$, $P''_{p,n}(x)$, ..., $P^{(n-1)}_{p,n}(x)$ besitzt höchstens eine reelle Nullstelle. Diese Nullstelle existiert nur dann, wenn der Grad des betreffenden Polynoms ungerade ist. Dann ist die reelle Nullstelle negativ und einfach.

Gy. v. Sz. Nagy (Szeged).

Morse, Anthony P.: *The behavior of a function on its critical set.* Ann. of Math., II. s. 40, 62—70 (1939).

The author proves: If $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ is defined on an open subset R of the Euclidean space E_n with all partial derivatives of orders 1, 2, ..., n continuous on R , and if S is the subset of R at which all derivatives of the first order are equal to zero, then f transforms S into a set of linear measure zero (cf. Whitney, Duke math. J. 1; this Zbl. 13, 58).

J. Ridder (Groningen).

Approximation von Funktionen, Orthogonalentwicklungen:

Kašanin, R.: *Sur les divers procédés d'interpolation.* Publ. Math. Univ. Belgrade 6/7, 240—266 (1938).

Elementary comparison of: method of Lagrange, method of Legendre, method of Newton, and method whose base is x^k ($k = 1, 2, \dots, n$). C. R. Adams.

Erdős, Paul, and Béla A. Lengyel: *On fundamental functions of Lagrangean interpolation.* Bull. Amer. Math. Soc. 44, 828—834 (1938).

Soient, $[\alpha, \beta]$ = intervalle fini et fermé, $M \geq p(x) \geq m > 0$ continue dans $[\alpha, \beta]$, $a \in (\alpha, \beta)$ et

$$I(f) = \int_{\alpha}^{\beta} p(x) f^2(x) dx.$$

Soit φ_n le polynome de degré n minimisant $I(f)$ sous la condition $I(\varphi_n) = 1$, x_k , $k = 1, 2, \dots, n$ les zéros de φ_n et $l_k(x) = \varphi_n(x)/(x - x_k)\varphi'_n(x_k)$. On a alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{[\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon]} l_k(x) = 1$$

et uniformément en x_k choisis pour chaque n de manière que $x_k \in [\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$). En passant, une élégante démonstration [pour $p(x) \geq 0$ intégrable] du fait que le maximum de deux zéros x_k consécutifs tend vers zéro avec $1/n$ et la remarque que le

polynome de degré $n - 1$ minimisant $I(f)$, sous la conditions $A = f(x_k)$, $B = f(x_r)$ est $Al_k(x) + Bl_r(x)$. T. Popoviciu (Cernăuți).

Lanczos, C.: Trigonometric interpolation of empirical and analytical functions. J. Math. Physics, Massachusetts Inst. Technol. **17**, 123—199 (1938).

The paper is concerned with practical methods of approximation. A difficulty in approximating to functions by Fourier series frequently arises from the fact that the integrals which determine the coefficients cannot be readily evaluated practically. The author shows how in many problems it is possible to employ the method of trigonometric interpolation, particularly with Tschebycheff's polynomials. — The author applies these series to the approximation of analytic functions in both the real and complex domains. In particular he gives a finite series for $\log \Gamma(x)$ valid for $1 \leq x < \infty$, which gives a closer approximation than the same number of terms of Stirling's series. The author further applies his methods to the solution of linear differential equations with rational coefficients. Offord (Cambridge).

Geronimus, J.: Sur un problème extrémal de Tschebycheff. Bull. Acad. Sci. URSS, Sér. Math. Nr 4, 445—455 u. franz. Zusammenfassung 455—456 (1938) [Russisch].

The author studies the minimum $\frac{1}{L_0}$ of $\int_0^{2\pi} |G(\theta)| d\theta$ for all trigonometric polynomials of order $\leq n$, whose coefficients satisfy a given linear relation. — The study is based upon a certain canonical representation of trigonometric polynomials whose zeros are all real. This is combined with the condition of J. Schur for the existence of a function $f(z)$, regular, with $|f(z)| \leq 1$, in the region $|z| \leq 1$, whose first $n + 1$ Taylorian coefficients are given in advance. An expression for L_0 is given (as the largest root of a certain determinantal equation), and various generalizations are indicated of the extremal problem under discussion. J. Shohat (Philadelphia).

Webster, M. S.: Orthogonal polynomials with orthogonal derivatives. Bull. Amer. Math. Soc. **44**, 880—888 (1938).

Neuer Beweis des Satzes: Sind $\Phi(x)$ und $\Phi'(x)$ orthogonale Polynomsysteme, so läßt sich $\Phi(x)$ durch eine lineare Transformation in x auf die Polynome von Jacobi, Laguerre oder Hermite reduzieren (W. Hahn, dies. Zbl. **11**, 62). Bei diesem Beweis wird direkt die Gewichtsfunktion des Polynomsystems berechnet. J. Meixner.

Foà, Alberto: Sulle serie coniugate delle serie di Legendre. (Firenze, 1.—3. IV. 1937.) Atti 1. Congr. Un. Mat. Ital. 156—157 (1938).

Bericht über eine inzwischen erschienene Untersuchung des Verf. (dies. Zbl. **17**, 109). G. Alexits (Budapest).

Ottaviani, Giuseppe: Sulla convergenza e sommabilità delle serie di Hermite e sul fenomeno di Gibbs. (Firenze, 1.—3. IV. 1937.) Atti 1. Congr. Un. Mat. Ital. 151—155 (1938).

Bericht über die Untersuchungen des Verf. bezüglich der Hermiteschen Reihe

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cdot e^{-\frac{u^2}{2}} H_n(u) du,$$

wo H_n das Hermitesche Polynom n -ter Ordnung bezeichnet. Verf. gibt (ohne Beweis) eine gute asymptotische Entwicklung von $H_n(x)$ an, welche einerseits die Berichtigung gewisser Resultate von Kogbetliantz (dies. Zbl. **5**, 157) ermöglicht [eine Berichtigung kommt auch bei Jacob (dies. Zbl. **16**, 398) vor], andererseits zum folgenden Satz führt: Erfüllt $f(x)$ eine der weiter unten angegebenen Unendlichkeitsbedingungen, so ist die Hermitesche Reihe äquikonvergent mit der Fourierentwicklung von $f(x)$ bzw. ist (C, δ) -summierbar ($\delta > 0$), falls auch noch die Lebesguesche Bedingung

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(x+t) + f(x-t) - 2\Phi(x)| dt = 0$$

erfüllt ist. Die erwähnten Unendlichkeitsbedingungen sind die folgenden: 1. Integrierbarkeit von $|f(x)| : x^{2/3}$ [für beschränkte $f(x)$ von $|f(x)| : x$] in $(-\infty, -a)$, $(a, +\infty)$ mit $a > 0$; 2. für $|x| \geq a$ ist $f(x)$ monoton und $= O(x^\alpha)$ mit $\alpha < 1$; 3. für $|x| \geq a$ ist $f(x) = o(x^{1/3})$ und $f'(x) = o(x)$; 4. Existenz von $f'(x)$ und Integrierbarkeit von $\left| \left[e^{-\frac{x^2}{2}} f(x) \right]' e^{\frac{x^2}{2}} \right| : x^{5/3}$ in $(-\infty, -a)$, $(a, +\infty)$. — Verf. spricht die Verschärfung eines Jacobsschen Resultats (dies. Zbl. 11, 213) aus und berichtet dann über seine inzwischen erschienenen Untersuchungen (dies. Zbl. 18, 15) bezüglich der Gibbsschen Erscheinung bei Hermiteschen Reihen. *G. Alexits* (Budapest).

Reihen:

Rajagopal, C. T.: Convergence theorems for series of positive terms. J. Indian Math. Soc., N. s. 3, 118—125 (1938).

Frühere Betrachtungen (vgl. dies. Zbl. 16, 301) teils vereinfachend, teils weiterführend, beweist Verf. die folgenden Konvergenzkriterien für Reihen $\sum a_n$ mit positiven Gliedern: Gilt für eine Reihe $\sum d_n$ mit $d_n > 0$, $d_n = O(1)$, $D_n = \sum_{\nu=1}^n d_\nu \rightarrow \infty$ und (I) eine positive, monoton abnehmende Funktion $F(x)$ mit konvergentem [bzw. divergentem] $\int_0^\infty F(x) dx$ stets die Beziehung $\frac{a_n}{d_n} \leq F(D_n)$ [bzw. $\geq F(D_n)$], so ist $\sum a_n$ konv. [bzw. div.]; (II) eine stetig differenzierbare Funktion $f(x)$ mit konv. [bzw. div.] $\int_0^\infty (\exp. \int_0^x f(t) dt) dx$ und konv. $\int_0^\infty |f'(x)| dx$ stets die Beziehung $\frac{1}{d_n} \log \frac{a_{n+1} d_n}{a_n d_{n+1}} \leq f(D_n)$ [bzw. $\geq f(D_n)$], so ist $\sum a_n$ konv. [bzw. div.]. Das Kriterium (II) läßt eine Erweiterung zu auf den Fall, daß $\int_0^\infty |f'(x)| dx$ div., jedoch für eine höhere Ableitung $\int_0^\infty |f^{(k)}(x)| dx$ konv. — Ähnliche Kriterien werden auch unter Verzicht auf die Voraussetzung $d_n = O(1)$ gewonnen. Endlich werden als Folgerungen eine Reihe bekannter Kriterien hergeleitet. *Lösch*.

Hornich, Hans: Eine geometrische Theorie der absolut konvergenten Reihen. Deutsche Math. 3, 684—688 (1938).

L'auteur étend et précise des résultats établis dans des travaux précédents [Mh. Math. Phys. 46 (1938); ce Zbl. 18, 208, 209] sur la correspondance entre la rapidité de convergence d'une série absolument convergente $\sum a_i$, et la structure de l'ensemble A_n des points ayant pour affixes les nombres pouvant être représentés par une série $\sum a_i \zeta^{l_i}$, où $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, et l_1, l_2, \dots est une suite arbitraire d'entiers. *E. Blanc*.

Turán, Paul: Über die Partialsummen der Fourierreihe. J. London Math. Soc. 13, 278—282 (1938).

The author proves the following theorem: Let $f(x)$ be positive and convex upwards in the interval $0 < x < \pi$; let $f(x) \sim \sum_1^\infty b_\nu \sin \nu x$, and $s_n(x) = \sum_1^n b_\nu \sin \nu x$; then for any x in the given interval and for all $n = 1, 2, 3, \dots$, $s_n(x) \leq 2f(x)$. He also proves that 2 is the best possible constant in this inequality. *Otto Szász*.

Veen, S. C. van: Das Gibbssche Phänomen. Mathematica, Zutphen 7, 64—73 (1938) [Holländisch].

Jacob, Mosè: Sul fenomeno di Gibbs nella teoria delle serie di Fourier. (Firenze, 1.—3. IV. 1937.) Atti 1. congr. Un. Mat. Ital. 226—230 (1938).

Das Auftreten der Gibbsschen Erscheinung bei der Cesàro-Rieszschen Summation (C, δ, λ^2) der Fourierreihe einer nach 2π periodischen Funktion $f(x)$ wird untersucht und gezeigt, daß die Gibbssche Erscheinung bei dieser Summationsmethode für kein $\delta > 0$ verschwindet, nur die Größe der Schwankung nimmt mit zunehmendem δ ab. Hat nämlich die im übrigen stetige Funktion $f(x)$ in $x = a$ einen Sprung D_a , so ist die Größe $G(\delta, \lambda^2)$ der Gibbsschen Schwankung der (C, δ, λ^2) -summierten Fourier-

entwicklung von $f(x)$:

$$G(\delta, \lambda^2) = D_a \cdot \frac{2^{\delta+1/2} \Gamma(\delta+1)}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi_{\delta,1}} \frac{J_{\delta+1/2}(\sigma)}{\sigma^{\delta+1/2}} d\sigma,$$

wo $J_{\delta+1/2}(\sigma)$ die Besselsche Funktion der Ordnung $\delta+1/2$ und $\xi_{\delta,1}$ die erste positive Wurzel der Gleichung $J_{\delta+1/2}(\sigma)=0$ bezeichnet. Die (C, δ, λ^2) -Summation verhält sich also in dieser Beziehung ganz anders als die (C, δ, λ) -Summation, bei welcher es ein δ^* zwischen 0 und 1 gibt, so daß die Gibbs'sche Erscheinung für $\delta < \delta^*$ auftritt, für $\delta \geq \delta^*$ dagegen nicht.

G. Alexits (Budapest).

Cesari, Lamberto: *Sulle funzioni di due variabili a variazione limitata secondo Tonnelli e sulla convergenza delle relative serie doppie di Fourier.* (Firenze, 1.—3. IV. 1937.) Atti 1. congr. Un. Mat. Ital. 215—218 (1938).

See this Zbl. 17, 255.

C. R. Adams (Providence).

● **De Marco, Gaetano:** *Il calcolo dell'infinitamente grande.* Napoli: 1938. 221 pag. L. 30.—

Das Buch behandelt unendliche Prozesse in einer ganz erstaunlichen Fülle von teils numerischen Beispielen über folgende Gegenstände: Il calcolo del „Transfinito“ (worunter die üblichen Grenzübergänge der Differential- und Integralrechnung verstanden werden), Summation und Multiplikation divergenter unendlicher Reihen, Quadratur divergenter Integrale, trigonometrische Reihen. Es kann aber nicht übersehen werden, daß die Begründung und die Fachsprache bezüglich des „Unendlichen“ arge Mängel enthalten und daß der Verf. glaubt, seine Ausführungen durch Betrachtungen über das „Transfinito“ im Sinne der Mengenlehre stützen zu müssen, die ebenso überflüssig wie abwegig sind.

Ullrich (Gießen).

Fort, Tomlinson: *The summability of exponential and factorial series.* Duke math. J. 4, 793—800 (1938).

Il s'agit des séries spéciales de la forme

$$\sum_1^{\infty} a_n e^{P_n(z)} \quad \text{et} \quad \sum_1^{\infty} b_n \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}{(z + \lambda_1) \dots (z + \lambda_n)}$$

où

$$P_n(z) = -z \sum_1^n \lambda_m^{-1} + \frac{z^2}{2} \sum_1^n \lambda_m^{-2} - \dots + (-1)^k \frac{z^k}{k} \sum_1^n \lambda_m^{-k}$$

et qui sont définies à l'aide d'une suite positive $\{\lambda_n\}$, $\lambda_{n+1} > \lambda_n$, $\lambda_n \rightarrow \infty$ pour $n \rightarrow \infty$, choisie d'avance, $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ étant des coefficients fixes. La suite $\{\lambda_n\}$ doit être telle que $\sum_1^{\infty} \lambda_n^{-1}$ diverge et que le rapport $\lambda_{n+1} : \lambda_n$ se laisse exprimer ainsi

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1 + \sum_1^r \frac{c_k}{\lambda_n^k} + \frac{c_{r+1}(n)}{\lambda_n^{r+1}}$$

où c_k sont de nombres fixes pour $1 \leq k \leq r$, la fonction de n , $c_{r+1}(n)$, étant bornée. La sommabilité étudiée est aussi définie par rapport à la suite $\{\lambda_n\}$: $\sum a_n(z)$ est dite sommable $R[\lambda, k]$ d'un ordre entier k , si la $k^{\text{ième}}$ moyenne $S_n^{(k)}(z)$, itérée définie par

$$S_n^{(k)}(z) \cdot \sum_{m=1}^n \lambda_m^{-1} = \sum_{m=1}^n \lambda_m^{-1} S_m^{(k-1)}(z)$$

admet une limite pour $n = \infty$. Le théorème fondamental concerne les conditions suffisantes, imposées aux facteurs $f_n(z)$ et à la suite $\{\lambda_n\}$ et qui assurent la sommabilité $R[\lambda, k]$ de la série $\sum a_n(z) f_n(z)$, étant donné que $\sum a_n(z)$ est sommable $R[\lambda, k]$. E. Kogbetliantz.

Oguiewetzki, I.: *Sur un procédé de sommation.* Bull. Sci. math., II. s. 62, 368—371 (1938).

The process is defined by $\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\infty} i e^{-x} \frac{x^i + k}{(i+k)!} s_i$, where k is a positive integer;

it is regular and its convergence field includes that of the Borel method. C. R. Adams.

Obrechhoff, Nikola: Applications de la sommation par les moyennes arithmétiques dans la théorie des séries de Fourier, des séries sphériques et ultrasphériques. (2. Congr. Interbalkan. des Math., Bucarest, 12. IX. 1937.) Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 40, Nr 1/2, 27—38 (1938).

Notice très complète et détaillée sur l'histoire de l'application des moyennes arithmétiques aux séries en question depuis 1900. Sont traités: sommabilités ordinaire et absolue, détermination du saut de la fonction développée, série conjuguée, constantes de Lebesgue, conditions à l'antipode ainsi que les résultats relatifs à l'approximation de la fonction développée par les moyennes arithmétiques. *Kogbeliantz.*

Randels, W. C.: On the absolute summability of Fourier series. Bull. Amer. Math. Soc. 44, 733—736 (1938).

Verf. gibt ein Beispiel einer Fourierreihe, die für $x = 0$ absolut A -summierbar ist, aber für kein k absolut C_k -summierbar sein kann. *Karamata* (Beograd).

Sansone, Giovanni: Sulla sommabilità di Cesàro delle serie di Laplace. (Firenze, 1.—3. IV. 1937.) Atti 1. congr. Un. Mat. Ital. 145—146 (1938).

Es wird (mit Beweisskizze) der Satz angegeben: Die Laplacesche Reihe einer auf der Einheitskugel summablen Funktion $f(P)$ ist für $k > \frac{1}{2}$ fast überall (C, k) -summierbar zum Wert $f(P)$ (vgl. G. Sansone, dies. Zbl. 17, 110). *F. Lösch.*

Avakumović, Vojislav G.: Sur l'inversion d'un procédé de sommabilité avec application. C. R. Acad. Sci., Paris 207, 766—768 (1938).

Let $J(s) = \int_0^\infty e^{-su} [B(u) - \varphi(u)] du$ converge for $\sigma > 0$ and for some $c \geq 0$, $e^{-ct^2} |J(\sigma + it)| \leq M$, $\sigma > 0$. Then $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} J(\sigma + it) = Q(t)$ exists almost everywhere. Suppose that for some $a^2 < 1/(4c)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[iyt - \frac{t^2}{4a^2} \right] Q(t) dt = o[\varphi(y)], \quad y \rightarrow \infty$$

Here $\varphi(u) = e^{\alpha u} l(u)$, $\alpha \leq 0$ [ref.: $\alpha \geq 0$?]

$l(u)$ slowly oscillating function. If in addition $B(u)$ satisfies a suitable Tauberian condition of the usual Karamata type, then $B(u) \sim \varphi(u)$ as $u \rightarrow \infty$. The proof is based upon the properties of the kernel $\exp[-a^2(u-y)^2]$. Other kernels are available and do a similar service if $Q(t)$ grows still faster. *E. Hille.*

Avakumović, Vojislav G.: Über das Verhalten Laplacescher Integrale an der Konvergenzgrenze mit neuem Beweis eines Satzes von Hardy-Ramanujan über das asymptotische Verhalten der Zerfällungskoeffizienten. (2. Congr. Interbalkan. des Math., Bucarest, 12. IX. 1937.) Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 40, Nr 1/2, 101—106 (1938).

Es werden (ohne Beweis) mehrere Sätze Tauberscher Art über das Laplacesche Integral $Y(s) = \int_0^\infty e^{-su} d\{A(u)\}$ gegeben, wo das Verhalten von $A(u)$ bei $u \rightarrow \infty$ aus dem Verhalten von $Y(s)$ in einer Umgebung des Punktes $s = 0$ geschlossen wird. — Der allgemeinste Satz dieser Art lautet: Satz III_g. Sei $A(u)$ von beschränkter Schwankung in jedem endlichen Intervall, $Y(s)$ ($s = \sigma + it$) beschränkt für $|t| < \sigma^{1/k}$, $k > 1$, und $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin xt}{t} Y(\varepsilon + |t|^k + it) dt = \pi Q(0) + o(x^{-\beta})$, $0 \leq \beta < 1$, $x \rightarrow \infty$. Aus

$$\liminf_{u=\infty} \text{Min}_{u \leq u' \leq u + \varepsilon u^{1/k}} u^{\beta \frac{k-1}{k}} e^{-\gamma \frac{k-1}{k}} \frac{\varrho(u') A(u') - \varrho(u) A(u)}{\varrho(u)} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \text{ mit } \gamma \geq 0, \varrho(x) > 0,$$

$\limsup_{x=\infty} \varrho(u + \varepsilon u^{1/k}) / \varrho(u) \rightarrow 1$, $\varepsilon \rightarrow 0$, folgt $A(u) = Q(0) + o\left(u^{-\beta \frac{k-1}{k}} e^{\gamma \frac{k-1}{k}}\right)$, $u \rightarrow \infty$. —

Als bemerkenswerte Anwendung dieses Satzes auf Potenzreihen ist der Satz V_1 . Sei

$$a_n \leq a_{n+1}, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ konvergent für } |x| < 1 \text{ und } f(x) - (-\log x)^\beta \exp(-\log x)^{-\alpha},$$

$\alpha > 0$, beschränkt in einem konvexen Bereich, dessen Begrenzung im Punkte $x = 1$

eine Berührung von der Ordnung α mit dem Konvergenzkreis hat. Dann ist

$$a_n \sim \alpha \left(1 + \frac{2\beta+1}{2(\alpha+1)}\right) \sqrt{\frac{\alpha+1}{2\pi}} n^{\frac{\alpha-2\beta}{2(\alpha+1)}} - 1 e^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} (\alpha+1)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Wird hier $f(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n x^n$ gesetzt, so folgt daraus für $\alpha = 1$ die

Hardy-Ramanujansche asymptotische Formel $p_n \sim \frac{1}{4\sqrt[3]{n}} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}$. Karamata (Beograd).

Minakshisundaram, S.: A Tauberian theorem on (λ, k) -process of summation. J. Indian Math. Soc., N. s. **3**, 127—130 (1938).

Einige Sätze des Ref. [Proc. London Math. Soc. **43**, 20—25 (1937); dies. Zbl. **16**, 395] werden auf Rieszsche Mittel k -ter Ordnung wie folgt erweitert: Sei

$$A(t) = \sum_{\lambda_n \leq t} a_n = R_0(t), \quad R_k(w) = \int_0^w (1-t/w)^k dA(t) \quad \text{und} \quad u_k = \overline{\lim}_{w=\infty} R_k(w), \quad l_k = \lim_{w=\infty} R_k(w).$$

Ist (I) $\lim_{n=\infty} \frac{a_n \lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} = -\alpha \leq 0$, so folgt für $k \geq 0$, $u_k \leq u_{k+1} + 2\sqrt{\alpha(u_{k+1} - l_{k+1})}$ und für $k > 0$ (II) $l_k \geq l_{k+1} - 2\sqrt{\alpha(u_{k+1} - l_{k+1})}$; für $k = 0$ gilt (II) nur im Fall, daß $\lambda_{n-1} \sim \lambda_n$ ist, sonst kann nur $l_0 \geq l_1 - \alpha$ behauptet werden. Verf. gibt eine entsprechende Verallgemeinerung an, wobei die Konvergenzbedingung (I) durch $\lim_{w=\infty} \{A(uw) - A(w)\} = -\alpha(u)$ zu ersetzen ist. Karamata (Beograd).

Boas jr., R. P.: A Tauberian theorem connected with the problem of three bodies. Amer. J. Math. **61**, 161—164 (1939).

Einen Satz von Sundman verallgemeinernd, gibt Verf. den folgenden Satz Tauberscher Art, der sich von den bisher bekannten Sätzen durch die nichtlineare Form der Konvergenzbedingung (I) unterscheidet: Sei $f(x) \in C^2$ in $(0, \infty)$, $w(x) \uparrow$ und > 0 für $x > 0$. Aus $f(x) = o(x)$ ($x \rightarrow +0$) und (I) $x f''(x) = O\{w(|f'(x)|)\}$ bei $x \rightarrow +0$ folgt $f'(x) = o(1)$, $x \rightarrow +0$. Karamata (Beograd).

Minakshisundaram, S. On V. Ramaswami's Tauberian theorem on oscillation. J. Indian Math. Soc., N. s. **3**, 131—135 (1938).

Den folgenden Ramaswamischen Satz: „Aus $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = O(1)$ bei $x \rightarrow 1$ und (I) $\lim_{n \leq m \leq (1+\delta)n; n \rightarrow \infty} (s_m - s_n) > o(\delta)$ bei $\delta \rightarrow 0$ folgt $\text{osc}_{n=\infty} s_n = \text{osc}_{x=1} f(x)$ “ leitet Verf. aus einem entsprechenden ab, wobei statt (I) $n a_n > o(1)$ vorausgesetzt wird. Verf. stützt sich dabei auf den folgenden Satz: Falls $U = \overline{\lim}_{x=1} f(x)$ und $L = \lim_{x=1} f(x)$ endlich sind, so folgt aus $\lim_{n=\infty} n a_n \leq \beta < \infty$ und $\lim_{n=\infty} n a_n \geq -\alpha > -\infty$, daß $\lim_{n=\infty} s_n \leq U + 2\sqrt{\alpha\beta}$ und $\lim_{n=\infty} s_n > L - 2\sqrt{\alpha\beta}$ ist. Karamata (Beograd).

Rado, R.: Some elementary Tauberian theorems. I. Quart. J. Math., Oxford Ser. **9**, 274—282 (1938).

Es werden elementare Sätze Mercerscher Art betrachtet, d. h. Bedingungen angegeben, damit ein Verfahren konvergenzgleich sei. Beispielsweise sei der folgende Satz erwähnt: Das durch die Transformation $y_n = \sum_{i=0}^n a_{ni} x_i$ definierte Verfahren sei regulär; ist $\sum_{i=0}^{n-1} |a_{ni}| < \vartheta |a_{nn}|$ mit $\vartheta < 1$, so ist dieses Verfahren konvergenzgleich, d. h. aus $y_n \rightarrow s$ folgt auch, daß $x_n \rightarrow s$. Karamata (Beograd).

Pitt, H. R.: Mercerian theorems. Proc. Cambridge Philos. Soc. **34**, 510—520 (1938).

Entsprechend den tiefliegenden Sätzen Tauberscher Art werden hier die tiefliegenden Sätze Mercerscher Art (d. h. Umkehrsatz ohne Konvergenzbedingung) betrachtet. Wie die erstgenannten Sätze werden die Mercerschen Sätze aus Satz 2 und

insbesondere Satz 4 abgeleitet. — Satz 2. Ist (I) $\underline{\lim} |K(it)| = \underline{\lim} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} dk(x) \right| > 0$ und $k(x) \in V$ (d. h. $k(x)$ in $(-\infty, \infty)$ von beschränkter Schwankung und ohne singuläre Komponente), so ist $1/K(it) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyt} dp(y)$ mit $p(y)$ von beschränkter Schwankung in $(-\infty, \infty)$. — Satz 4. Ist $K(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} dk(x)$, $s = \sigma + it$, absolut konvergent für $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$, und $\underline{\lim} |K(s)| > 0$, $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$, so ist $1/K(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} dp(x)$ absolut konvergent für $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$. — Verf. beweist: Sei $s(x)$ stetig, $k(x) \in V$ und $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} s(x-y) dk(y)$: Aus (I) und $s(x) = O(1)$ folgt (II) $\limsup_{x=\infty} |s(x)| < C(k) \limsup_{x=\infty} |g(x)|$. — Wird statt (I) vorausgesetzt, daß (III) $\underline{\lim} |K(s)| > 0$ ist für $0 \leq \sigma \leq \sigma_0$ und $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} dk(x)$ absolut konvergent für $0 \leq \sigma \leq \sigma_0 + \varepsilon$, so folgt (II), falls nur $s(x) = O(e^{\sigma x})$ ist, für alle σ zwischen $\sigma_0 < \sigma \leq \sigma_0 + \varepsilon$. Ist hingegen $k(x) = \text{konst.}$ in $(-\infty, 0)$ und (III) für alle $\sigma \geq 0$ erfüllt, so folgt (II) ohne irgendeine Voraussetzung über $s(x)$. — Diese Sätze werden auf das Hausdorfsche Verfahren angewendet und insbesondere gezeigt: Sei $h(t) \in V$, $h(+0) = h(0)$, $h(1) = 1$, $a_n = \int_0^1 t^n dh(t)$ und $a_{i,n-i} = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n-i}{j} a_{i+j}$ gesetzt; notwendig und hinreichend, damit aus $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a_{i,n-i} s_i \rightarrow s$ die Konvergenz $(s_n \rightarrow s)$ folgt, ist, daß $\underline{\lim} \left| \int_0^1 t^\sigma dt \right| > 0$ für jedes $\sigma \geq 0$ sei.

Karamata (Beograd).

Dirichletsche Reihen, fastperiodische Funktionen:

Dvoretzky, Aryeh: Sur la semi-convergence des séries et en particulier de celles de Dirichlet. C. R. Acad. Sci., Paris 207, 1159—1161 (1938).

L'A. démontre le théorème suivant: Soit $f = \sum a_n$ une série convergente à termes réels. Changeons l'ordre des termes de $\sum a_n$ en conservant l'ordre des termes positifs et celui des termes négatifs entre eux. Soit $s = \sum a_{n'}$ la nouvelle série ainsi obtenue, supposée également convergente, et soit g_n une suite réelle tendant vers zéro. Posons $F = \sum a_n g_n$, $S = \sum a_{n'} g_{n'}$. Si l'une des séries converge, l'autre converge aussi et l'on a $F = S$. Si $g_n = g_n(z)$ et si $g_n(z) \rightarrow 0$ uniformément dans un domaine D , si l'une des séries $F(z) = \sum a_n g_n(z)$, $S(z) = \sum a_{n'} g_{n'}(z)$ converge uniformément l'autre converge aussi uniformément et l'on a dans D : $F(z) = S(z)$. Ce fait, joint à un théorème où l'on remplace g_n par $h_n \rightarrow +\infty$, permet d'établir la proposition suivante: Soit (1) $f(z) = \sum a_n e^{-\lambda_n z}$ (a_n réels, $0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n \rightarrow \infty$, $s = \sigma + it$). Soient C et A respectivement les abscisses de conv. simple et absolue, $C < A < +\infty$. Soit $C < \sigma_0 < A$. Supposons que $\sum a_{n'} e^{-i\lambda_{n'} s_0}$ converge. Dans ces conditions $S(z) = \sum a_{n'} e^{-i\lambda_{n'} z}$ converge pour $\sigma > \sigma_0$ uniform. dans $\{ \arg[z - (\sigma_0 + \varepsilon)] < (\pi/2) - \delta \}$ (ε, δ arb. petits). On a dans ce demi-plan $S(z) \equiv f(z)$ et si $S(\sigma_0) \neq f(\sigma_0)$, $S(z)$ diverge proprement sur le segment $C < \sigma < \sigma_0$ vers $+\infty$ ou $-\infty$ selon que $S(\sigma_0) < f(\sigma_0)$ ou $S(\sigma_0) > f(\sigma_0)$.

Mandelbrojt (Paris).

Toeplitz, Otto: Zur Theorie der Dirichletschen Reihen. Amer. J. Math. 60, 880—888 (1938).

We are indebted to A. Wintner for the publication of this highly interesting note, written in 1918, the existence of which has long been known to many mathematicians, including the present reviewer. — Let $f(it)$ be defined and bounded, $|f(it)| \leq M$, $-\infty < t < \infty$, and let the mean-values $\mathfrak{M}\{f(it)e^{i\lambda t}\} = c(\lambda)$ exist for every real λ and vanish except for $\lambda = \log n$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Put $c_n = c(\log n)$ and

define the D -form $D(x, y) = \sum_{n,k} c_n x_n y_{nk}$. Then $D(x, y)$ is bounded in the sense of Hilbert, its supremum being $\leq 2M$. The values taken on by the forms $D_n(x, \bar{x})$ [$y_k = \bar{x}_k, x_k = 0$ for $k > n$] are located in \mathfrak{R} , the least convex domain determined by the values of $f(ti)$. The maximum H_n of such a form on the unit sphere is $\leq M = \sup |f(ti)|$. Actually M can be replaced by $\bar{M} = \limsup_{|t| \rightarrow \infty} |f(ti)| \leq M$ and \mathfrak{R} can be replaced by K , the least convex domain determined by the asymptotic values of $f(ti)$. If $f(ti) = \sum_1^\infty c_n n^{-it}$, $\sum |c_n| < \infty$, all assumptions are satisfied and the associated D -form is $D(x, y)$. Here $M = \bar{M} = \lim_{n \rightarrow \infty} H_n$ and all values of $f(ti)$ are located in the smallest convex polygon determined by the asymptotic values. Moreover, the values of the forms $D_n(x, \bar{x})$ are dense in K . These observations lead to a simple proof of the theorem that in the domain of absolute convergence of a Dirichlet series $\limsup_{|t| \rightarrow \infty} |f(\sigma + it)|$ is a never-increasing function of σ . Finally, if the D -form of the series $\sum_1^\infty c_n n^{-s}$ is bounded in Hilbert's sense, the bound of $D(x, \bar{x})$ being H , then the series is absolutely convergent for $\Re(s) > \frac{1}{2}$ and represents an analytic function which is holomorphic and in absolute value $< H$ for $\Re(s) > 0$. *E. Hille.*

Vignaux, J. C.: Einfache und zweifache asymptotische Dirichletsche Reihen. An. Soc. Ci. Argent. 126, 97—130 (1938) [Spanisch].

Elementary properties of asymptotic developments of functions into simple and double Dirichlet series and factorial series are established by simple generalization of the usual argument. There are some errors in the discussion of double series.

Otto Szász (Cincinnati, Ohio).

Delsarte, J.: Une extension nouvelle de la théorie des fonctions presque-périodiques de Bohr. Acta math. 69, 259—317 (1938).

Es wird die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{2p+1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (1)$$

betrachtet, wo p eine reelle Konstante mit $|p| < \frac{1}{2}$ ist. Eine für $-\infty < r < \infty$ definierte gerade stetige Funktion $f(r)$ wird J -fastperiodisch von erster Art genannt, wenn diejenige Lösung $\Phi(r, t)$ von (1), die den Anfangsbedingungen

$$\Phi(r, 0) = 0, \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{t=0} = f(r)$$

genügt, im Bohrschen Sinne fastperiodisch in bezug auf t ist. Analog wird $f(r)$ J -fastperiodisch von zweiter Art genannt, wenn die Lösung $\Psi(r, t)$ von (1) mit

$$\Psi(r, 0) = f(r), \quad \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)_{t=0} = 0$$

fastperiodisch in bezug auf t ist. Schließlich heißt die Funktion $f(r)$ absolut J -fastperiodisch, wenn sie J -fastperiodisch sowohl von erster als auch von zweiter Art ist. Verf. zeigt, daß diese Funktionsklassen weitgehende Analogien zur Klasse der gewöhnlichen fastperiodischen Funktionen aufweisen. Insbesondere läßt sich jede J -fastperiodische Funktion in abzählbar viele Schwingungen auflösen. Hierbei tritt an Stelle der Exponentialschwingungen $e^{i\lambda r}$

$$j(\lambda r) = \frac{2^p \Gamma(p+1)}{(\lambda r)^p} J_p(\lambda r),$$

wo J_p wie üblich die Besselsche Funktion vom Index p bezeichnet. Es existiert stets der Mittelwert

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R r^{2p+1} f(r) j(\lambda r) dr, \quad (2)$$

und er verschwindet für alle λ bis auf höchstens abzählbar viele positive Werte λ_n

Mit diesen und den zugehörigen (passend normierten) Mittelwerten (2) läßt sich dann der Funktion $f(r)$ eine Fourierreihe $\sum a_n j(\lambda_n r)$ zuordnen. Jede J -fastperiodische Funktion zweiter Art läßt sich gleichmäßig durch „Besselpolynome“ $\sum_1^N A_n j(\lambda_n r)$ approximieren. Die absolut J -fastperiodischen Funktionen bilden einen linearen Unterraum des durch das innere Produkt

$$(f, g) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R r^{2p+1} f(r) \bar{g}(r) dr$$

definierten, nichtseparablen Hilbertschen Raumes. — Die Beweise beruhen auf gewissen, vom Verf. im ersten Teil der Arbeit eingehend untersuchten Integraltransformationen, die die J -fastperiodischen Funktionen in Bohrsche überführen. (Vorläufige Mitteilung dies. Zbl. 18, 212.) *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Kawata, Tatsuo, and Shin-ichi Takahashi: On the convergency of an almost periodic Fourier series. *Tôhoku Math. J.* 45, 145—153 (1938).

Es werden Sätze von Bochner verallgemeinert [Proc. London Math. Soc. (2) 26, 433 (1927)]. So wird gezeigt: Es sei $f(x)$ eine reelle fastperiodische Funktion, deren Fourierkonstanten nicht in unendlich viele Intervalle $(\mu_i - \delta_i, \mu_i + \delta_i)$ eintreten, für die gilt

$$\delta_i \mu_i \geq D > 0 \quad (D \text{ Konstante}). \quad (1)$$

Außerdem gelte $\omega_f(\delta) \log \delta = o(1)$ für $\delta \rightarrow 0$, wobei $\omega_f(\delta) = \overline{\lim} |f(x_1) - f(x_2)|$ mit $|x_1 - x_2| < \delta$. Wenn dann

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \lambda_n x + b_n \sin \lambda_n x) \quad \lambda_n \geq 0$$

und die Funktionen $S_{\mu_i}(x)$ erklärt werden durch

$$S_{\mu_i}(x) \sim \sum_{\lambda_n < \mu_i} (a_n \cos \lambda_n x + b_n \sin \lambda_n x),$$

so gilt gleichmäßig in jedem endlichen Intervall

$$\lim_{i \rightarrow \infty} S_{\mu_i}(x) = f(x).$$

Bochner hat einen ähnlichen Satz bewiesen unter der Annahme, daß sämtliche δ_i in (1) gleich $\frac{1}{2}$ sind. *Maak* (Heidelberg).

Spezielle Funktionen:

Krall, H. L.: Certain differential equations for Tchebycheff polynomials. *Duke math. J.* 4, 705—718 (1938).

Soient

$$L(y) = \sum_{i=0}^r P_i y^{(i)} - \lambda_n y, \quad P_i = \sum_{j=0}^i l_{ij} x^j, \quad \lambda_n = \sum_{i=0}^r n(n-1) \dots (n-i+1) l_{ii},$$

$\Delta_n = |c_{i+j}|$, $i, j = 1, \dots, n-1$, $n = 1, 2, \dots$ les déterminants de Hankel de la suite c_0, c_1, \dots et $T_n = |xc_{i+j} - c_{i+j+1}|$, $i, j = 1, \dots, n-1$ les polynômes de Tchebycheff généralisés correspondants. Les polynômes orthogonaux classiques de Jacobi, Laguerre, Hermite vérifient une équation de la forme $L(y) = 0$, $r = 2$. L'aut. démontre que les conditions nécessaires et suffisantes pour que, sous l'hypothèse $\Delta_n \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$, les polynômes T_n vérifient une équation de la forme $L(y) = 0$ sont

$$\sum_{i=2n+1}^r \sum_{j=0}^i \binom{i-n-1}{n} \frac{(m-2n-1)!}{(m-i)!} l_{i,i-j} c_{m-j} = 0;$$

$$m = 2n+1, 2n+2, \dots; \quad n = 0, 1, \dots, \left[\frac{r-1}{2} \right].$$

Seul le cas r pair peut être réalisé. Suit un exemple pour $r = 4$ qui ne se réduit pas au cas $r = 2$. Dans la formule (7) p. 707 il faut rétablir le facteur $(-1)^{n-i}$ dans le second membre.

T. Popoviciu (Cernăuți, Roumanien).

Engen, H. van: Concerning gamma function expansions. Tôhoku Math. J. 45, 124—129 (1938).

Als Verallgemeinerung eines Satzes von W. B. Ford [Asymptotic Developments of Functions defined by Maclaurin Series. Mich. Science Series 11, 74 (1936)] wird folgendes Ergebnis hergeleitet: $\Omega(z)$ sei für beliebige reelle oder komplexe a_i, b_i durch

$\Omega(z) = \frac{\Gamma(z+a_1)\Gamma(z+a_2)}{\Gamma(z+b_1)\Gamma(z+b_2)}$ definiert. Dann gilt für $|\arg z| < \pi$ und große $|z|$ die Entwicklung

$$\Omega(z) = \left(\frac{1}{z}\right)^p \left\{ 1 + \frac{c_1}{z+1} + \frac{c_2}{(z+1)(z+2)} + \dots \right\} \text{ mit } p = b_1 + b_2 - a_1 - a_2$$

und konstanten c_i . Im Falle $p = 0$ wird für die c_i eine Art Rekursionsformel angegeben, die bei gewissen speziellen a_i, b_i leicht zu expliziten Formeln führt. Das gilt z. B. für die Besselfunktionen und die hypergeometrischen Funktionen, die unter den $\Omega(z)$ vorkommen.

B. Schoeneberg (Hamburg).

Shastri, N. A.: An infinite integral involving Bessel functions, parabolic cylinder functions, and the confluent hypergeometric functions. Math. Z. 44, 789—793 (1939).

Verf. geht aus von einer unendlichen Integraldarstellung für die parabolischen Zylinderfunktionen, wobei der Integrand das Produkt einer Exponentialfunktion und einer Potenz ist. Durch eine einfache Substitution entsteht eine andere Schreibweise für diese Integraldarstellung, welche Verf. noch verkürzt durch Einführung der Darstellungsart des Operatorenkalküls. Mit Hilfe einiger aus diesem Kalkül bekannten Substitutionen gelangt er zu einer Darstellung einer konfluenten hypergeometrischen Funktion durch ein unendliches Integral, wobei der Integrand das Produkt einer Potenz, einer Exponentialfunktion, einer Weberschen Funktion und einer Besselschen Funktion halbzahlicher Ordnung ist. Einige Sonderfälle dieser unendlichen Integralformel werden diskutiert. Besonders bemerkenswert ist ein bereits früher abgeleiteter Sonderfall, wobei eine Webersche Funktion durch ein unendliches Integral dargestellt wird, dessen Integrand ebenfalls eine Webersche Funktion enthält, deren Ordnung um eins kleiner ist als die Ordnung der zuerst genannten Weberschen Funktion. Bei einem anderen Sonderfall ergibt das genannte unendliche Integral eine Hankelsche Funktion erster Art.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Banerjee, D. P.: On the expansion of a function in a series of $q_n(z)$. J. Indian Math. Soc., N. s. 3, 164—168 (1938).

Es handelt sich um Funktionen, die bei der Lösung des Potentialproblems in sphäroidalen Koordinaten auftreten, und zwar nach Abtrennung der Winkelabhängigkeit. Diese Funktionen sind bis auf einen Faktor Legendresche Funktionen zweiter Art mit rein imaginärem Argument. Verf. geht von der bekannten unendlichen Integraldarstellung aus. Eine „willkürliche“ Funktion, welche nach diesen Sphäroidalfunktionen entwickelt werden soll, wird durch ein Integral in der komplexen Ebene dargestellt, das eine analoge Form hat wie jenes, das aus der erwähnten Integraldarstellung der Sphäroidalfunktionen nach einfacher Umformung entsteht. Hierdurch wird die gesuchte Entwicklung erhalten. Als Sonderfälle behandelt Verf. eine negative Potenz, absolut genommen größer als 1, und eine Exponentialfunktion dividiert durch eine Potenz. Hierauf führt Verf. Funktionen ein, welche durch sukzessive Differentiation der behandelten Sphäroidalfunktionen entstehen, und führt in analoger Weise die Reihenentwicklung einer „willkürlichen“ Funktion nach diesen Funktionen durch.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Meijer, C. S.: Beiträge zur Theorie der Whittakerschen Funktionen. III. Mitt. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 41, 879—888 (1938).

This is a continuation of the former paper (Zbl. 19, 62). It contains proofs of theorems 4, 5, 6, 7, 8—11. In one of these use is made of an expression in terms of

Gamma functions and the generalised hypergeometric function for the integral

$$\int_0^{\infty} K_{2m}(2v/\eta) J_{m-k}(v) J_{-m-k}(v) dv \quad |\arg \eta| < \frac{1}{2}\pi, \quad R(\frac{1}{2} - k \pm m) > 0.$$

This expression was obtained originally for $|\eta| < 1$, is extended by analytical continuation to all points in the η -plane on the right of the imaginary axis. In the proof of theorem 10 it is shown that if $|\arg z| \leq \frac{1}{4}\pi$, $R(m) > -\frac{1}{4}$, $R(\frac{1}{2} - k + m) > 0$

$$8\Gamma(2m+1) \int_0^{\infty} K_{m+k}(v^2/z^2) I_{m-k}(v^2/z^2) J_{4m}(4v) v dv = \Gamma(\frac{1}{2} - k + m) W_{k,m}(2z^2) M_{-k,m}(2x^2).$$

H. Bateman (Pasadena).

Bateman, H.: Paraboloidal coordinates. Philos. Mag., VII. s. 26, 1063—1068 (1938).

Verf. geht von der Definition von vier symmetrischen Potentialfunktionen aus, welche durch unendliche Integrale gewonnen werden. Die Integranden enthalten je eine willkürliche Funktion mit geeigneten Integrierbarkeitseigenschaften, multipliziert mit Exponentialfunktionen, Besselschen Funktionen sowie irrationalen Funktionen. Die vier willkürlichen Funktionen in den Integranden sind durch fünf Integralgleichungen miteinander verknüpft. Verf. wählt nun für diese willkürlichen Funktionen besondere Ausdrücke. Im ersten Fall eine Legendresche Funktion multipliziert mit einer Potenz, im zweiten Fall eine verallgemeinerte hypergeometrische Funktion multipliziert mit einer Exponentialfunktion, im dritten Fall eine Funktion, welche durch eine Integralgleichung mit unendlichem Integrationsgebiet definiert wird, und im vierten Fall eine ebensolche Funktion. Für diese vier Fälle berechnet er die eingangs definierten Potentialfunktionen.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Differentialgleichungen, allgemeine Theorie:

● **Hoheisel, Guido:** Gewöhnliche Differentialgleichungen. 3., neubearb. Aufl. (Samml. Götschen Nr. 920.) Berlin: Walter de Gruyter 1938. 126 S. RM. 1.62.

Fayet, Joseph: Sur la réduction des équations linéaires et homogènes aux équations à coefficients constants. Bull. Soc. Math. France 66, 194—209 (1938).

L'autore considera un'equazione differenziale lineare omogenea $f[y] = 0$ nella funzione incognita $y(x)$ e dimostra che, affinché essa sia riducibile ad un'equazione a coefficienti costanti con sostituzioni del tipo $y = \lambda(x)z$, $dt = u(x)dx$, occorre e basta che esistano quattro funzioni G, g, μ, ν , tali che si abbia identicamente

$$G(x)f[\mu(x)y' + \nu(x)y] = \frac{d}{dx}[g(x)f[y]].$$

Alcuni esempi illustrano il risultato ottenuto.

C. Miranda (Genova).

Neumer, Walter: Die allgemeinsten Differentialgleichungen vierter und fünfter Ordnung, welche durch Berührungstransformation in die Differentialgleichungen der Parabeln und der Kegelschnitte übergeführt werden können. J. reine angew. Math. 179, 193—203 (1938).

Außer den in der Überschrift bezeichneten Differentialgleichungen werden auch noch die von dritter und von vierter Ordnung behandelt, die durch Berührungstransformation überführbar sind in die Differentialgleichung aller Kegelschnitte mit gemeinsamem Linienelement und in die aller Kegelschnitte durch einen Punkt. Zu der allgemeinsten G_8 von Berührungstransformationen, die mit der allgemeinen projektiven Gruppe der Ebene ähnlich ist, gehören ∞^3 derartige Differentialgleichungen 3. O., je ∞^2 solche von 4. O. und eine bestimmte von 5. O. Ausgehend von den Definitionsgleichungen der G_8 , kann man die Definitionsgleichungen der Gruppen der Differentialgleichungen 3. und 4. O. hinschreiben, sodann die Gleichung 3. O. mit 3 Parametern aufstellen und aus dieser durch Differentiation und Elimination die Gleichung 5. O. ableiten. Ähnlich findet man die Gleichungen 4. O. Endlich kann man für die zugehörigen Gruppen invariante Bogenelemente herstellen und mit deren Hilfe die

Differentialinvarianten der Gruppen. Durch Grenzübergang gelangt man zu den entsprechenden Differentialgleichungen für den Fall, daß man sich auf Punkttransformationen beschränkt. Es ist das eine Frage, die 1922 in den Ber. math.-phys. Kl. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig von Schwanhäusser und Engel erledigt worden ist. Die Übertragung auf den allgemeineren Fall der Berührungstransformationen ist eine wirkliche Leistung. Engel (Gießen).

Popovici, C.: Sur la stabilité des positions d'équilibre et des trajectoires. (2. Congr. Interbalkan. des Math., Bucarest, 12. IX. 1937.) Bull. Math. Soc. Roum. Sci. **40**, Nr 1/2, 253—257 (1938).

Hebroni, P.: Über lineare Differentialgleichungen in Ringen und ihre Anwendungen auf lineare Integrodifferentialgleichungen. II. Compositio Math. **6**, 258—284 (1938).

Die in der Mitteilung I [Compositio Math. **5**, 403—429 (1938); dies. Zbl. **19**, 63] entwickelten Methoden werden nun auf eine Reihe weiterer Gleichungstypen angewandt, wobei die Grundgedanken im wesentlichen die gleichen sind. Behandelt wird zunächst die nichthomogene Gleichung (1) $z' = za + b$ (entsprechend der Lagrangeschen Methode der Variation der Konstanten); die „zweiseitige“ Gleichung (2) $z' = az + zb$ mit der Lösung $z = uc$, wenn u, v Fundamentallösungen von (3) $u' = au$ bzw. $v' = vb$ sind und c konstant ist. Im selbstadjungierten Falle (4) $z' = az - za$ bilden die Lösungen einen Ring, der zum Ring der Konstanten in R isomorph ist. Genügt w der adjungierten Gleichung (2) $w' = -bw - wa$, so genügt zw der Gleichung (4) und ist daher, wenn das Produkt der Anfangswerte von z und w mit a vertauschbar ist, konstant; Verallgemeinerung auf Produkte von $2n$ Faktoren. Die aufschlußreiche Deutung von (2) als Transformation von (3) in $t' = -bt$ vermöge $u = zt$ [$b = -a$: Transformation von (3) in sich] wird nicht behandelt. Die Untersuchung der besonderen Lösungen, für die z einem nunmehr zweiseitigen Ideal $K \subset R$ angehört, leitet zu den Anwendungen auf Integrodifferentialgleichungen über, bei denen ein R , wie in I. geschildert, benützt wird. Neben den Prozeß $\sigma_2(z_{00}/b)$ tritt entsprechend noch $\sigma_1(a/z_{00})$ als skalares Äquivalent von az , falls $z \in K$. Bei der Übertragung der obigen Sätze auf die so hervorgehenden Gleichungen wie aus (2):

$$z'_{00} = \sigma_1(a/z_{00}) + \sigma_2(z_{00}/b)$$

(wo die Koeffizienten von s_1, t_1, s_2, t_2, x abhängen) entsprechen den „Konstanten“ [vgl. bei (2), (4)] Funktionen von s_1, t_1, s_2, t_2 allein; im Unterring bei (4) ist das Produkt zweier Lösungen z_{00}, \tilde{z}_{00} folgendes:

$$\int_0^1 \int_0^1 z_{00}(x; s_1, \lambda_1, s_2, \lambda_2) \tilde{z}_{00}(x; \lambda_1, t_1, \lambda_2, t_2) d\lambda_1 d\lambda_2.$$

Zuletzt werden noch die zweiseitigen nichthomogenen Gleichungen behandelt.

Hermann Schmidt (Jena).

Cartan, Élie: La théorie de Galois et ses généralisations. Comment. math. helv. **11**, 9—25 (1938).

Zu jeder irreduzibeln algebraischen Gleichung in einem beliebigen Rationalitätsbereiche gehört eine bestimmte Galoissche Gruppe g , eine Untergruppe der Fundamentalgruppe G aller Vertauschungen der Wurzeln. Die Gruppe g hat zwei charakteristische Eigenschaften: sie besteht aus allen Vertauschungen von G , die eine partikuläre Lösung, d. h. ein in bestimmter Weise angeordnetes System von Wurzeln, wieder in eine Lösung überführen. Ferner bleibt jede irreduzible Gleichung, der eine partikuläre Lösung genügt, invariant (ist automorph) gegenüber einer mit g gleichberechtigten Untergruppe \tilde{g} von G . Diese Galoissche Theorie kann auf gewisse automorphe Systeme von Differentialgleichungen übertragen werden, das sind solche, deren allgemeine Lösung aus einer partikulären durch die Operationen einer bestimmten Gruppe G , der Fundamentalgruppe, hervorgeht. Während die grundsätzliche Betrachtung solcher automorpher Systeme auf Lie zurückgeht, ist die Übertragung jener Theorie auf gewöhnliche lineare Differentialgleichungen das Verdienst von Picard und Vessiot,

die Übertragung auf allgemeine Differentialgleichungen das von Drach und Vessiot. Dabei mußten die Begriffe Rationalitätsbereich und Irreduzibilität übertragen werden. Ist aber in einem beliebigen Rationalitätsbereich ein automorphes System von Differentialgleichungen vorgelegt, so braucht die Fundamentalgruppe G nicht aus Operationen zu bestehen, die dem Rationalitätsbereich angehören. Ferner ist man nur, wenn G endlich ist, sicher, daß das vorgelegte System durch Hinzufügung von Gleichungen zu einem irreduzibeln ergänzt werden kann. An einer Reihe von einfachen Beispielen zeigt der Verf., daß dann die Übertragung der Galoisschen Theorie nicht immer möglich ist. Es kann sein, daß eine der beiden charakteristischen Eigenschaften der Galoisschen Gruppe fehlt, es können sogar beide in Wegfall kommen. Der Verf. hat ferner schon früher die Frage aufgeworfen, für welche linearen Differentialgleichungen die Picard-Vessiot'sche Theorie bestehen bleibt, wenn der Rationalitätsbereich nicht alle komplexen Zahlen umfaßt, sondern z. B. nur die natürlichen rationalen Zahlen. Er gibt einen recht allgemeinen Fall an, wo sie bestehen bleibt, weil die Drach-Vessiot'sche Theorie anwendbar ist. Er behandelt sodann die Gleichung:

$$x''' : x' - \frac{3}{2} (x'' : x')^2 = R(t) \quad (x' = du : dt), \quad (20)$$

wo R eine rationale rationalzahlige Funktion von t ist, und wo die Fundamentalgruppe G aus allen linear gebrochenen Transformationen in x besteht. Er zählt die bekannten Typen von Untergruppen von G auf und hat damit alle Formen, die die Galoissche Gruppe g der Gleichung haben kann. Diese geht er der Reihe nach durch. Jeder Form von g entspricht eine automorphe Differentialgleichung oder ein automorphes System von algebraischen Gleichungen. Ist diese Gleichung oder das System reduzibel, so kann die Galoissche Gruppe nur eine Untergruppe von g sein, ist sie (das System) irreduzibel, so gehört sie (das System) entweder selbst schon dem Rationalitätsbereich an, der aus allen rationalen Zahlen besteht, oder sie kann durch eine linear gebrochene Transformation, bei der g invariant bleibt, eine solche Form erhalten. Die Drach-Vessiot'sche Theorie ist daher in allen Fällen anwendbar, es sei denn, daß die Gleichung (20) allgemein ist. *Engel* (Gießen).

Ritt, J. F.: Algebraic aspects of the theory of differential equations. Amer. Math. Soc., Semicent. Publ. 2, 35—55 (1938).

Eine Übersicht über die Ergebnisse und Beweismethoden der neueren Arbeiten von Ritt, Raudenbush, Gourin und Strodts, in denen die allgemeine Theorie der algebraischen Differentialgleichungen und ihrer Lösungsmannigfaltigkeiten in Analogie zur Theorie der algebraischen Mannigfaltigkeiten, insbesondere zur Eliminationstheorie, begründet wird. Behandelt werden: der Basissatz, der Satz von der eindeutigen Zerlegung in irreduzible Mannigfaltigkeiten, die Grundlagen der Idealtheorie, der Begriff der allgemeinen Lösung, die Klassifikation der singulären Lösungen und einige Eigenschaften der irreduziblen Mannigfaltigkeiten. *van der Waerden*.

Petrovitch, Michel: Équations différentielles algébriques d'ordre fini à intégrales réelles bornées. Publ. Math. Univ. Belgrade 6/7, 65—76 (1938).

Sia data l'equazione (*) $y^{(m)} = P/Q$ con

$$P = \sum_{p_0, p_1, \dots, p_h} f_{p_0, p_1, \dots, p_h}(x) (y)^{2p_0} (y')^{2p_1} \dots (y^{(h)})^{2p_h}, \quad Q = \sum_{p_0, p_1, \dots, p_h} \varphi_{p_0, p_1, \dots, p_h}(x) (y)^{2p_0} (y')^{2p_1} \dots (y^{(h)})^{2p_h}$$

con le somme composte ciascuna di un numero finito di termini, e siano verificate le seguenti ipotesi: I. Se $f_{p_0, p_1, \dots, p_h}(x)$ non è identicamente nullo, sia corrispondentemente $\varphi_{p_0, p_1, \dots, p_h}(x)$ non nullo; II. le $\varphi_{p_0, p_1, \dots, p_h}(x)$ siano continue e tutte dello stesso segno per qualunque valore reale di x . L'A. dimostra che, fissato comunque x_0 , ogni integrale reale della (*) ha l'espressione

$$y = P_{m-1}(x) + \psi_1 + \vartheta \psi_2,$$

dove:

$$1. P_{m-1} = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(x-x_0)^n}{n!} y^{(n)}(x_0); \quad 2. \psi_1 = \int_{(m)0}^x \dots \int_{(m)0}^x \Delta_1 dx^m, \quad \psi_2 = \int_{(m)0}^x \dots \int_{(m)0}^x (\Delta_2 - \Delta_1) dx^{m'}.$$

essendo per ogni x , Δ_1 e Δ_2 il più piccolo e il più grande dei rapporti

$$f_{p_0, p_1, \dots, p_h}(x)/\varphi_{p_0, p_1, \dots, p_h}(x);$$

3. $0 \leq \vartheta \leq 1$. — L'A. studia poi altre classi di equazioni e in particolare le equazioni $y'/y = P/Q$, $y''/y = P/Q$. *Giovanni Sansone* (L'irenze).

Kotsakis, D.: Untersuchungen über eine Klasse der Mongeschen Gleichungen. (2. Congr. Interbalkan. des Math., Bucarest, 12. IX. 1937.) Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 40, Nr 1/2, 167—170 (1938).

Zu jedem $(n-1)$ -gliedrigen nichtlinearen Involutionssysteme 1. Ordnung im R_{n+1} gehört eine Mongesche Gleichung, deren allgemeinste Integralkurve nach Goursat integralfrei darstellbar ist (vgl. dies. Zbl. 3, 208). Hier wird diese Darstellung für einige Beispiele wirklich durchgeführt. Dabei kommt stets alles auf die Integration der partiellen Differentialgleichung $pq = 1$ hinaus. *Engel* (Gießen).

Engel, Friedrich: Eine neue Darstellung der Integrationstheorie der vollständigen Systeme. J. reine angew. Math. 180, 73—85 (1939).

Die Funktionen ξ_{ki} des m -gliedrigen vollständigen Systems:

$$X_k f = \sum_{i=1}^n \xi_{ki}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (k = 1, \dots, m)$$

seien in der Umgebung des Punktes x^0 von allgemeiner Lage in eine Potenzreihe entwickelbar. Verf. bestimmt alle Integralvereine im Lieschen Sinne, d. h. alle Vereine von ∞^{n-1} Elementen x_i , $p_i: p_k$, die den Gleichungen $\sum_i \xi_{ki} p_i = 0$ genügen und deren

Punktörter in der Umgebung von x^0 liegen. Das Neue an der Herleitung ist, daß die Punktmannigfaltigkeiten M konsequent in der Gaußschen Parameterdarstellung geschrieben werden. — Integriert man das simultane System $dx_i: dt = \sum_k \lambda_k \xi_{ki}$ und legt

die so erhaltenen M_m durch die Punkte einer $(n-m)$ -dimensionalen Ebene $x_i = x_i^0 + \sum_v \alpha_v u_v$, die so gewählt sei, daß die Determinante $|\xi_{1i}(x^0) \dots \xi_{mi}(x^0) \alpha_{1i} \dots \alpha_{n-m,i}| \neq 0$

ist, so erhält man $\infty^{n-m} M_m$ in der Form $x_i = \Omega_i(\lambda_1 t, \dots, \lambda_m t, u_1, \dots, u_{n-m})$, worin die $\lambda_k t$ als Veränderliche und die u als Parameter zu betrachten sind. Diese M_m sind von Bahnkurven der infinitesimalen Transformationen $\sum \chi_k(x) X_k f$ erzeugt und liefern zu Vereinen ergänzt eine vollständige Lösung des vollständigen Systems. Durch bestimmte Wahl der u als Funktionen von v_1, \dots, v_l ($0 \leq l < n-m$) erhält man sämtliche Integral- V_{n-1} mit $(m+l)$ -dimensionalem Punktort. *K. Faber* (Mainz).

De Mira Fernandes, A.: Equazioni di struttura dei gruppi di Lie. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 27, 631—633 (1938).

Der Verf. zeigt, daß die Lieschen Strukturgleichungen $(X_p X_q) = \sum_{s=1}^k c_{pq s} X_s f$ durch die Gleichungen $V_{[pq]} = -\sum_{s=1}^k c_{pq s} V_s$ ersetzt werden können, in welchen nur Vektoren auftreten. Dabei ist

$$V_{[pq]} = [V_p(P_q) - V_p(M')] - [V_q(P_p) - V_q(M')], \quad (*)$$

und der Vektor V_s ist nichts anderes wie der linke Faktor des skalaren Produkts $V_s \times \text{grad} f = X_s f$. Der Verf. schreibt die endlichen Transformationsgleichungen einer k -gliedrigen Gruppe des R_n in der symbolischen Form $M' = T(M, a)$, wo M, M' die Punkte des R_n bedeuten und a für k Parameter a_1, \dots, a_k steht. Dann ist ja bekanntlich nach Lie

$$dM' = \sum_{\lambda=1}^k \frac{\partial M'}{\partial a_\lambda} da_\lambda = \sum_{s=1}^k V_s(M') \omega_s(a, da),$$

wo die Vektoren $V_s(M')$ weder von den a noch den da abhängen und die $\omega_s(a, da)$ linear homogen in den da sind. Die Punkte P_s in (*) schließlich sind definiert als die Endpunkte des von M' ausgehenden Vektors $V_s(M') : V_s(M') = P_s - M'$.

W. Neumer (Worms).

Cimmino, Gianfranco: *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di tipo ellittico sopra una superficie chiusa.* (Firenze, 1.—3. IV. 1937.) Atti 1. Congr. Un. Mat. Ital. 194—199 (1938).

Résumé d'un mémoire de même titre à l'impression. Il s'agit de l'extension linéaire elliptique de l'équation de Beltrami et de celle étudiée par M. Picard (voir p. ex. Leçons sur quelques problèmes aux limites. Gauthier-Villars 1930). Étude sur la surface fermée. Ainsi: nombre fini de solutions distinctes de l'équation homogène; l'équation à second membre n'a de solutions que si celui-ci est orthogonal aux solutions de l'équation adjointe homogène. *Brelot* (Bordeaux).

Badescu, Radu: *Semplificazioni ed estensioni del metodo di Picone per l'integrazione delle equazioni lineari alle derivate parziali del 2° ordine di tipo iperbolico.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 27, 624—630 (1938).

In zwei Arbeiten aus Rend. Circ. mat. Palermo 30 (1910), 31 (1911) hat Picone gezeigt, daß die klassischen Integrationsprobleme der Differentialgleichung

$$u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y - c(x, y, u) = 0 \quad (1)$$

sich auf Integralgleichungen vom Volterraschen Typus zurückführen lassen. Verf. zeigt, daß dieser Vorgang auch dann noch anwendbar ist, wenn die Koeffizienten von (1) gewisse Singularitäten haben. Das Ergebnis wird zur Untersuchung des Goursatschen Problems bei der Gleichung $x^p y^q u_{xy} - u = 0$ ($p, q < 1$) angewendet. *Miranda*.

Vranceanu, G.: *Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre.* (2. Congr. Interbalkan. des Math., Bucarest, 12. IX. 1937.) Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 40, Nr 1/2, 161—166 (1938).

Dans un récent Mémoire (v. ce Zbl. 17, 351) l'a. a étudié les invariants par rapport aux transformations de contact d'une équation aux dérivées partielles du second ordre et il s'est occupé, en particulier, de l'équation (1) $F(r, s, t) = 0$. Dans le présent travail l'a. donne une méthode plus directe pour obtenir les cinq invariants de l'équation (1) en partant de l'équation linéaire qu'on peut associer à (1). L'équation linéaire en question peut être transformée dans une équation de Laplace (L) et on a des formules simples liant les invariants de l'équation (1) aux coefficients de l'équation (L). L'équation (1) s'intègre par la méthode de Darboux si un des invariants de l'équation (L) ou bien un des invariants successifs est nul et inversement. L'a. indique quelques cas remarquables où cette intégration est applicable. *O. Borůvka* (Brno).

Differential- und Integralgleichungen der mathematischen Physik, Potentialtheorie:

Tonolo, Angelo: *Integrazione con quadrature di una classe di sistemi differenziali di Dirac.* (Firenze, 1.—3. IV. 1937.) Atti 1. Congr. Un. Mat. Ital. 168—169 (1938).

Bericht über die vom Verf. anderwärts [Math. Z. 41 (1936); Ann. di Mat. (4) 15 (1936); dies. Zbl. 15, 111; 16, 28] gegebene Lösung des Cauchyschen bzw. gemischten Problems bei einem Diracschen System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung. *E. Hölder* (Leipzig).

McLachlan, N. W.: *Operational form of $f(t)$ for a finite interval, with application to impulses.* Philos. Mag., VII. s. 26, 695—704 (1938).

The operational form of $f(t)$ over the finite interval (h_1, h_2) is defined to be the function $\Phi_{h_1, h_2}(p) \equiv p \int_{h_1}^{h_2} e^{-pt} f(t) dt$. In this paper certain theorems concerning $\Phi_{h, \infty}(p)$

and $\Phi_{0, h}(p)$ are given and contour integrals for these are furnished. An illustrative example in which an electric circuit is subjected to repeated impulses is worked out.

Murnaghan (Baltimore).

Cabrera, Nicolas: *Sur la loi de multiplication des matrices représentatives des opérateurs différentiels linéaires.* C. R. Acad. Sci., Paris 208, 261—262 (1939).

Verf. versucht eine exakte Ableitung zu geben für die Matrizendarstellung der Multiplikation mit linearen Differentialoperatoren. Durch zweimalige Anwendung des Greenschen Satzes zusammen mit der Vollständigkeitsrelation erhält man Formeln für die Multiplikation mit Impuls p_x und Hamiltonoperator H , welche sich von den

üblichen um Oberflächenintegrale unterscheiden. Unterliegen die Eigenfunktionen am Rande der Bedingung $\varphi = 0$ oder auch $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$, dann sind bei Multiplikation mit H die Zusatzglieder $\neq 0$, während für p_x immer die normalen Regeln der Matrizenmultiplikation gelten.

Walter Franz

Gorélik, G.: Oscillations de systèmes non-linéaires proches de systèmes linéaires à paramètres périodiques. Techn. Physics USSR 5, 320—328 (1938).

Erweiterung der Methode von van der Pol [Philos. Mag. 3 (1927)], Mandelstam und Papalexi [Techn. Physics USSR 1 (1935)], bei der die Untersuchung von Schwingungsproblemen auf das Studium der Lösungen einer Differentialgleichung erster Ordnung in der Nähe von singulären Punkten zurückgeführt wird, auf eine Differentialgleichung von der Form $\ddot{x} + 2\sigma(t)\dot{x} + \varrho(t)x = \mu F(x, \dot{x}, t)$;

dabei sind $\varrho(t)$ und $\sigma(t)$ periodische Funktionen von derselben Periode und der Mittelwert von $\sigma(t)$ ist null.

Funk (Prag).

Miranda, Carlo: Su di un problema di stabilità di vibrazioni. (Firenze, 1.—3. IV. 1937.) Atti 1. Congr. Un. Mat. Ital. 203—206 (1938).

Untersuchung über die Stabilität von Schwingungsvorgängen, die der Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - A\omega^2 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial z^2 \partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) + B\omega^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2i \frac{\partial u}{\partial t} - u \right) = 0$$

und Randbedingungen bei $z = 0$ und $z = 1$ genügen; u wird in der Gestalt einer unendlichen Reihe $\sum_k \varphi_k(t) A_k(z)$ angesetzt.

Collatz (Karlsruhe).

Agostinelli, C.: Integrali primi delle equazioni del moto di un corpuscolo elettrizzato, in presenza di N ennepoli magnetici cogli assi sovrapposti. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 28, 88—92 (1938).

Verf. geht aus von dem Potentialausdruck eines magnetischen n -Poles und gewinnt durch Summenbildung das Potential von N solchen n -Polen. Verf. stellt sich als Ziel, außer dem bekannten Energieintegral der Bewegungsdifferentialgleichungen eines elektrisch geladenen Punktkörpers im Felde dieser magnetischen Pole ein neues erstes Integral zu gewinnen. Durch Anwendung von einfachen Regeln der Vektorrechnung gewinnt er eine Umformung der Bewegungsdifferentialgleichung in Vektorform, in die er den vorher gewonnenen Ausdruck für das skalare Potential der magnetischen Pole einsetzt. Durch Benutzung der Eigenschaften der Kugelflächenfunktionen, welche in dem Ausdruck für das genannte skalare Potential der magnetischen Pole enthalten sind, ergibt sich nach einfacher Rechnung eine Formel für die Geschwindigkeit des elektrisch geladenen Teilchens. Zum Schluß geht Verf. auf die mechanische Bedeutung des so erhaltenen Ausdrucks ein, wobei er davon ausgeht, daß die eine Seite der erhaltenen Gleichung die doppelte Winkelgeschwindigkeit des Teilchens in einer Achse bedeutet.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Egerváry, E.: Über die Differentialgleichungen der Elektronenbewegung im stationären Magnetfelde. Mat. természett. Értes. 57, 968—985 u. deutsch. Zusammenfassung 986—987 (1938) [Ungarisch].

Gialanella, L.: Sul moto di un corpuscolo elettrizzato in presenza di un dipolo magnetico. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 28, 14—22 (1938).

This paper treats the motion of an electrified particle in a magnetic field due to two equal and opposite fixed magnetic poles situated at a finite distance from one another. The treatment uses Poincaré's "equations of variation"; the solution from which the variations are measured being that in which the particle moves with constant velocity along the line joining the two magnetic poles.

Murnaghan (Baltimore).

Muskat, Morris: A note on a problem in potential theory. J. appl. Physics 8, 434—440 (1937).

The problem is to find potential functions Φ_1, Φ_2 for regions R_1, R_2 respectively,

each region having as one boundary the moveable surface $F(x, y, z, t) = 0$ which always lies between the other two boundaries S_w, S_e which are fixed. The boundary conditions are $\Phi_1 = \Psi_w(x, y, z, t)$ on S_w , $\Phi_2 = \Psi_e(x, y, z, t)$ on S_e , $\Phi_1 = \Phi_2$, $c_1 \partial \Phi_1 / \partial n = c_2 \partial \Phi_2 / \partial n$ on $F = 0$. The initial position of F is supposed to coincide with S_e the motion of F is governed by the equation $\partial F / \partial t - c_{1,2} \nabla \Phi_{1,2} \cdot \nabla F = 0$. The constants c_1, c_2 are the mobilities of oil and water respectively; the surface $F = 0$ is the continuously changing water-oil interface as the oil which originally occupied the sand between S_w and S_e is gradually displaced by water. — The problem is solved approximately by a perturbation theory in which it is assumed that $|c_2 - c_1| = |\eta| \ll c_{1,2}$, $F = F_0 + \eta F_1 + \eta^2 F_2 + \dots$, $\Phi_1 = \Phi_{10} + \eta \Phi_{11} + \eta^2 \Phi_{12} + \dots$, $\Phi_2 = \Phi_{20} + \eta \Phi_{21} + \eta^2 \Phi_{22} + \dots$, where all the Φ 's are potential functions. The coefficients in these series are found step by step as in other methods of successive approximations. The linear and radial encroachment problems are worked out in detail.

H. Bateman (Pasadena).

Garcia, Godofredo, et Alfred Rosenblatt: Sur la formule de Stokes dans la théorie de la gravité. Bull. Sci. math., II. s. 63, 7—23 (1939).

Vorgegeben ist eine rotierende, von der Kugel nur wenig verschiedene Gleichgewichtsfigur mit der Oberfläche S . Angenommen wird eine 2., von der Fläche S_1 begrenzte Masse; S_1 unterscheidet sich nur wenig von S . Der Unterschied der Radienvektoren in zusammengehörigen Punkten beider Flächen wird durch die Ortsfunktion $\sum_1 \gamma^n U_n(\theta, \omega)$ gegeben, in der die Konstante γ vom Schwereunterschied $g_1 - g = \gamma f(\theta, \omega)$ in jenen beiden Punkten bestimmt wird. Jedes der beiden Raumpotentiale kann durch das Potential einer einfachen Flächenbelegung von den Dichten μ bzw. $\mu_1 = \mu + \sum_1 \gamma^n N_n$ ausgedrückt werden. Zur Bestimmung der Funktionen U_n, N_n

lassen sich 2 Gleichungen aufstellen, deren eine aus dem Flächenpotential S_1 und deren andere aus seiner Ableitung nach der Flächennormale hervorgeht. Als Bedingung tritt die Forderung der Konstanz der Masse hinzu. Zunächst kommt der Fall zur Sprache, daß S eine Kugel ist, der nach Lösung einer Integralgleichung zu bekannten Ergebnissen führt. Sodann wird die Lösung des allgemeinen Falls in Angriff genommen, indem die Aufgabe auf 2 Integro-Differentialgleichungen zurückgeführt wird, deren Lösung die Verff. mit der Erörterung der Konvergenzfrage ihres Verfahrens für die nächste Fortsetzung in Aussicht stellen.

Hopfner (Wien).

Nevanlinna, Rolf: Über das alternierende Verfahren von Schwarz. J. reine angew. Math. 180, 121—128 (1939).

Verf. macht die interessante Bemerkung, daß das im Titel genannte Verfahren konvergiert und zur Lösung der Dirichletschen Randwertaufgabe führt, auch dann, wenn die Gebietsränder der Schwarzschen (quantitativen) Bedingung nicht genügen. Es seien D_1 und D_2 zwei Gebiete mit nichtleerem Durchschnitt, von $\Gamma_1 = \alpha + \bar{\alpha}$ bzw. von $\Gamma_2 = \beta + \bar{\beta}$ berandet, wo $\bar{\alpha}$ den in D_2 fallenden Teil von Γ_1 , und $\bar{\beta}$ den in D_1 fallenden Teil von Γ_2 bezeichnet. Weiter sei vorausgesetzt, daß f eine auf dem Rand $\alpha + \beta$ von $D_1 + D_2$ stetige Funktion ist und daß die Randpunkt mengen $\alpha, \bar{\alpha}, \beta$ und $\bar{\beta}$ aus endlich vielen Jordanbögen bestehen. Es bezeichne hier allgemein $V(f, g)$ die in D_1 beschränkte harmonische Funktion mit den Randwerten f auf α und g auf $\bar{\alpha}$, ebenso $U(\varphi, \psi)$ die in D_2 beschränkte harmonische Funktion mit den Randwerten φ auf β und ψ auf $\bar{\beta}$. Die Gleichungen $v_0 = V(f, g)$, $v_n = V(f, u_{n-1})$, $n \geq 1$, $u_n = U(f, v_n)$, $n \geq 0$, bestimmen dann zwei Folgen harmonischer Funktionen in D_1 bzw. in D_2 , die nur von f und g abhängen. Unter der Schwarzschen Bedingung konvergieren v_n und u_n gegen harmonische Funktionen, die in $D_1 D_2$ übereinstimmen und in $D_1 + D_2$ die Lösung der Randwertaufgabe mit der Belegung f leisten. Verf. erhält diese Ergebnisse in sehr einfacher Weise, indem er die willkürliche Funktion g gleich $\inf f$

wählt, wobei die Folgen v_n und u_n monoton anwachsend und also auch konvergent ausfallen. Da diese Eigenschaft offenbar von der Natur der Randwerte und der Ränder im ganzen nicht abhängt, so gestattet sie erhebliche Verallgemeinerungen, was auch bemerkt wird. Schließlich betrachtet Verf. die Integralgleichungen der Randwertaufgabe, deren Lösung durch sukzessive Approximationen mit dem Schwarzschen Verfahren identisch ist.

Beurling (Uppsala).

Nevanlinna, Rolf: Über die Lösbarkeit des Dirichletschen Problems für eine Riemannsche Fläche. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen I, N. F. 1, 181—193 (1939).

Es wird eine offene abstrakt definierte Riemannsche Fläche F betrachtet und zwei Fälle unterschieden, je nachdem das absolute harmonische Maß des idealen Randes Γ Null oder positiv ausfällt. Im ersten Falle gibt es auf F keine beschränkte nichtkonstante harmonische Funktion, und die Randwertaufgabe ist dann unlösbar (wenn F einfach zusammenhängend ist; vgl. Verf.: Eindeutige analytische Funktionen, S. 134. Berlin 1936). Um im zweiten Falle dem Begriff Randpunkt geeignete Eigenschaften zuordnen zu können, wird F als Überlagerungsfläche einer gegebenen offenen oder geschlossenen Riemannschen Fläche \bar{F} definiert und folgenden Bedingungen unterworfen, (A): \bar{F} enthalte die (abgeschlossene) Spur $\bar{\Gamma}$ des Randes Γ , (B): F sei relativ zu der Grundfläche \bar{F} schlicht. Eine auf F stetige und dem Rand zustrebende Kurve L , deren Spur \bar{L} in einem wohlbestimmten Punkt \bar{E} mündet, definiert einen (in bezug auf \bar{F}) erreichbaren Randpunkt E von F . Bei Abbildung der universellen Überlagerungsfläche F^∞ auf den Kreis $K(|z| < 1)$ entspricht L eine abzählbare Menge von Kurven (L_z), die in wohlbestimmte in bezug auf S äquivalente Punkte (E_z) auf $|z| = 1$ münden. Ferner gilt, daß zwei in gewissem Sinne als verschieden definierte Randpunkte E' und E'' punktfremden Klassen (E'_z) und (E''_z) entsprechen. Die Gesamtheit dieser Punktklassen hat das Lebesguesche Maß 2π (oder Null, falls das absolute harmonische Maß von Γ verschwindet, vgl. l. c., S. 204). Eine Menge (M) erreichbarer Randpunkte heißt „harmonisch meßbar“, falls die Bildmenge (M_z) im Lebesgueschen Sinne meßbar ist; dann ist das harmonische Maß $\omega(z, M_z, K)$ eine wohlbestimmte und in bezug auf S automorphe Funktion, die sich bei Abbildung $K \rightarrow F^\infty \rightarrow F$ in eine auf F harmonische und eindeutige Funktion $\omega(P, M, F)$ transformiert. Durch das harmonische Maß $\omega(P, M, F)$ wird das Poisson-Fatousche Integral auf F übertragen und die Randwertaufgabe in ihrer allgemeinsten Fassung erledigt. Verf. bemerkt schließlich, daß die Bedingung (A) notwendig ist, läßt aber die Frage offen, wieweit (B) verallgemeinert werden kann.

Beurling (Uppsala).

Thiruvenkatachar, V. R.: Note on harmonic functions. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 8, 227—236 (1938).

If a function u is harmonic in a domain D of xyz -space, then at every point P of D the integral mean $M(u, P, R)$ of u , taken over the surface of any sphere in D with center P and radius R is equal to $u(P)$. Conversely, a continuous function u possessing this property is harmonic (Bocher, Koebe). According to Blaschke, if $\lim [M(u, P, R) - u(P)]/R^2 = 0$ for $R \rightarrow 0$ at every point P of D , then u is harmonic in D , and similar but somewhat stronger theorems were obtained subsequently by Saks and others. The purpose of the present paper is to show that the solutions of Poisson's equation, as well as those of the equation $\Delta u + cu = 0$, can be characterized by similar mean-value properties.

Tibor Rado (Columbus).

Perkins, F. W.: Certain mean value theorems, with applications in the theory of harmonic and subharmonic functions. Amer. J. Math. 61, 217—230 (1939).

Étude d'une certaine moyenne pondérée de $f(t)$ dépendant de 3 paramètres. Application dans le plan ou espace aux fonctions harmoniques et sousharmoniques (nouveaux critères) avec introduction de moyennes générales contenant les moyennes périphérique, spatiale et aussi radiale et conique.

Brelot (Bordeaux).

Integralgleichungen, Integraltransformationen:

Koeppler, Hans: Die Lösung von Summengleichungen durch die Loewyschen Formeln zur Darstellung von Integralgleichungen nach Übertragung dieser auf endliche Differenzen. *Aktuár. Vědy* 7, 155—163 (1938).

Der Verf. versteht unter Summengleichungen Gebilde mit Jahresintervallen, welche den Volterraschen Integralgleichungen entsprechen. Solche Summengleichungen — prospektive und retrospektive — werden aufgestellt und ihre Lösungen gegeben. Nach dem beschriebenen Verfahren wird auch eine Summengleichung für die Sparprämie gelöst, welche früher nach einer Methode von Cramér gelöst wurde. *Janko* (Praha).

Temliakow, A.A.: Über die nichtlineare Integralgleichung vom Typus $\int_b^a F(x, s, \varphi(s)) ds = f(x)$. *Mitt. Forsch.-Inst. Math. u. Mech. Univ. Tomsk* 2, 83—96 u. deutsch. Zusammenfassung 97—98 (1938) [Russisch].

Der Verf. untersucht die im Titel angegebene Integralgleichung, wobei F die Eigenschaft hat, daß $F_{x''}^{(n)}(0, s, u) \neq 0$ ist. — Es wird zunächst der Fall, wo F ein Polynom in x ist, betrachtet und die Existenz einer Lösung $\varphi(x, \lambda)$ von $\int_0^1 F[x, s, \varphi(s)] = \lambda f(x)$ bewiesen, für die $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \varphi(x, \lambda) = 0$ gilt. — Ähnliche Resultate werden in dem Falle erzielt, daß F sich wenig von einem Polynom in x unterscheidet, in u eine Lipschitzbedingung erfüllt und $\int_0^1 F^2(x, s, 0) ds < \infty$ ist. — Schließlich werden hinreichende Bedingungen für die Lösbarkeit der betrachteten Gleichung angegeben. *Stefan Bergmann*.

Amerio, L.: Un esempio tipico nella teoria della trasformazione di Laplace. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. 28, 85—88 (1938).

Verf. stellt sich das Ziel, eine Funktion einer komplexen Veränderlichen aufzustellen, welche als Integrand in einem unendlichen Laplaceschen Integral für ein Gebiet des Parameters, in dem der reelle Teil größer als -1 ist, eine neue Funktion des Parameters ergibt, welche für ein Gebiet, in dem der reelle Teil größer als -2 ist, analytisch ist. Hierzu geht Verf. aus von einem Beispiel einer Dirichletschen Reihe, das H. Bohr aufgestellt hat. Verf. gewinnt seine Funktion als Summe zweier Funktionen, von denen die eine nur positive und die andere nur negative Werte annimmt. Er beweist, daß die zur Konstruktion dieser Funktionen verwendeten unendlichen Reihen als Konvergenzabszisse den Wert -1 haben. Zum Schluß beweist er, daß durch Anwendung der Laplaceschen Integration die gewünschte Funktion hervorgeht.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Thielman, H. P.: A note on the use of the Laplace transformation. *Amer. Math. Monthly* 45, 508—510 (1938).

Assuming the existence of $I = \int_0^\infty F(t) \frac{dt}{t}$ the author proves the existence of $J = \int_0^\infty f(x) dx$, where $f(x) = \int_0^\infty e^{-xt} F(t) dt$, and shows that $I = J$. Applications to the computation of definite integrals. [The sense in which the integrals are supposed to exist is not clearly stated. The theorem is true if $F(t)$ is integrable L over every interval $0 < \varepsilon \leq t \leq \omega < \infty$, I and J being limits as $\varepsilon \rightarrow 0$, $\omega \rightarrow \infty$ of \int_ε^ω .] *Hille*.

Funktionalanalysis, Funktionalräume:

Bristow, Leonard: Expansion of functions in solutions of functional equations. *Bull. Amer. Math. Soc.* 44, 874—879 (1938).

Untersucht werden linear inhomogene Funktionalgleichungen, welche außer integrodifferentiellen Prozessen auch Argumentstreckungen in Betracht ziehen. Andeutungen über Entwicklungssätze.

Wilhelm Maier (Greifswald).

Mizoguti, Yukioto: Abelsche Gruppe und Funktionensystem. Jap. J. Math. 15, 27—50 (1938).

Der Zweck der Arbeit ist, Sätze von A. Haar [Math. Z. 33, 129—159 (1931); dies. Zbl. 1, 55] und von Béla v. Sz. Nagy [Math. Ann. 114, 373—384 (1937); dies. Zbl. 16, 350] über orthogonale Funktionensysteme, die aus den Charakteren einer abzählbaren Abelschen Gruppe aufgebaut sind, auf den Fall nichtabzählbarer Abelscher Gruppen zu übertragen. Es wird gezeigt, daß eine Übertragung möglich ist, nur erhält man dann nicht mehr orthogonale Funktionensysteme auf einem Intervall, sondern solche, die im abstrakten Raume der Charaktere definiert sind. — Das Problem wird, wie bei Haar, auf das Problem der simultanen Spektraldarstellung von Systemen vertauschbarer unitärer Transformationen eines Hilbertschen Raumes § zurückgeführt. Es gelingt ja dem Verf., eine Art von solcher simultaner Spektraldarstellung auch in dem Falle anzugeben, daß die Dimension von § nichtabzählbar ist. — Ref. bemerkt, daß man auch diese Verallgemeinerungen ohne Zuhilfenahme der Theorie Hilbertscher Räume erhalten könnte, wie hierauf schon am Ende der obengenannten Arbeit von B. v. Sz. Nagy kurz hingewiesen wurde. Sz. Nagy (Szeged).

Kantorovitch, Leonidas, et Aaron Pinsker: Sur les formes générales des fonctionnelles partiellement additives dans certains espaces semi-ordonnés. C. R. Acad. Sci., Paris 208, 72—74 (1939).

Fortsetzung einer früheren Note (C. R. Acad. Sci., Paris 207, 1376—1378; dies. Zbl. 19, 417). Weitere allgemeine Resultate über Integraldarstellungen $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\gamma) d\epsilon_\gamma$

von teilweise additiven stetigen Funktionalen. Spezielle Resultate: In \tilde{M} , dem K -Raum der meßbaren und wesentlich beschränkten Funktionen, hat ein solches Funktional die Gestalt (1) $F(x) = \int_E \varphi[x(t), t] dt$, wobei $\varphi(\mu, t)$ für festes μ in L liegt, $\varphi(\mu, t)$ be-

züglich μ stetig ist, $\varphi(0, t) = 0$ fast überall, $|\varphi(\mu, t)| \leq \varphi^*(t)$ ($\alpha \leq \mu \leq \beta$, $\varphi^* \in L$). Die Darstellung (1) gilt auch für L^p , die letzte Bedingung für φ ist zu ersetzen durch: $|\varphi(\mu, t)| \leq K|\mu|^p + \varphi^*(t)$, $\varphi^* \in L$. Ohne Beweise. G. Köthe (Münster).

Neumark, M.: Über die Potenzreihen von Operatoren im Hilbertschen Raume. Rec. math Moscou, N. s. 3, 473—482 u. deutsch. Zusammenfassung 482 (1938) [Russisch].

Es sei $f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$ (1) eine Potenzreihe und X ein linearer beschränkter Operator im Hilbertschen Raume. Es werden über die Reihe $f(X) = c_0 1 + c_1 X + c_2 X^2 + \dots$ (2) folgende Tatsachen bewiesen: I. Es gibt im Raume aller beschränkten Operatoren ein sternartiges Gebiet G (im Sinne der gleichmäßigen Topologie für Operatoren) derart, daß für alle Operatoren X , die innerhalb G liegen, die Reihe (2) im Sinne der gleichmäßigen Topologie konvergent ist, und zwar absolut konvergent, und für alle Operatoren X , die außerhalb G liegen, die Reihe (2) auch in der schwachen Topologie divergent ist. — II. Ein beschränkter Operator X ist dann und nur dann ein innerer Punkt von G , wenn das Spektrum von X ganz innerhalb des Konvergenzkreises von (1) liegt. — III. Ist X ein innerer Punkt von G , so ist die Zahl w_0 dann und nur dann Eigenwert bzw. Punkt des residuellen bzw. Punkt des kontinuierlichen Spektrums von $f(X)$, wenn es unter den Wurzeln der Gleichung $f(z) = w_0$ Eigenwerte von X bzw. keine Eigenwerte aber Punkte des residuellen Spektrums von X , bzw. keine Eigenwerte und keine Punkte des residuellen Spektrums, aber Punkte des kontinuierlichen Spektrums von X gibt. Auszug.

Marcinkiewicz, Joseph: Une remarque sur les espaces de M. Besikowitch. C. R. Acad. Sci., Paris 208, 157—159 (1939).

B_p sei der Raum der Funktionen $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) mit der Metrik $|f - g| = \limsup_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |f - g|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}$. Es wird bewiesen, daß B_p ($p \geq 1$) vollständig bezüglich der Metrik ist. G. Köthe (Münster).

Kakutani, Shizuo: Weak convergence in uniformly convex spaces. *Tôhoku Math. J.* 45, 188—193 (1938).

S. Banach und S. Saks [*Studia Math.* 2, 51—57 (1930)] bewiesen, daß aus jeder schwach konvergenten Folge von Elementen aus L^p ($p > 1$) eine Teilfolge herausgegriffen werden kann, deren arithmetische Mittel stark gegen denselben Grenzwert konvergieren. Dieser Satz wird auf beliebige gleichmäßig konvexe (im Sinn von J. A. Clarkson [dies. Zbl. 15, 356]) Banachräume ausgedehnt. *G. Köthe.*

Variationsrechnung:

McShane, E. J.: Some existence theorems in the calculus of variations. I. The Dresden corner condition. *Trans. Amer. Math. Soc.* 44, 429—438 (1938).

Dans cette première Note l'A. donne une nouvelle démonstration de la condition nécessaire de Dresden pour les points anguleux d'une courbe, qui réalise le minimum fort pour un problème isopérimétrique en forme paramétrique. La méthode suivie va être reprise dans les Notes suivantes pour établir des théorèmes d'existence. — La condition est donnée même pour la forme ordinaire avec un artifice, qui reconduit ces intégrales à la forme paramétrique. *S. Cinquini (Pavia).*

McShane, E. J.: Some existence theorems in the calculus of variations. II. Existence theorems for isoperimetric problems in the plane. *Trans. Amer. Math. Soc.* 44, 439—453 (1938).

L'A. donne un théorème d'existence du minimum (absolu) de l'intégrale $F[y] = \int f(x, y, y') dx$, dans la classe des courbes $y = y(x)$ (avec $y(x)$ absolument continue), qui joignent deux points fixes, et pour lesquelles les intégrales $G^i[y] = \int g^i(x, y, y') dx$ ont valeurs données. Tandis que dans ses recherches antérieures il a suivi la méthode bien connue de M. Tonelli, dans le présent travail il généralise le procédé (donné à la note I voir le ref. préc.) de M. Levy, et qui a été déjà repris par M. Manià. Ceci donne à l'A. la possibilité de considérer problèmes dans lesquels les fonctions g^i sont non linéaires dans y' , mais il doit supposer que ces fonctions ne dépendent pas des variables x, y . Avec cette remarquable restriction, il faut mettre en évidence l'hypothèse suivante (qui tient lieu de la quasi-régularité de l'intégrale $F[y]$): L'intervalle $(-\infty + \infty)$ peut être subdivisé en un nombre fini $[k]$ d'intervalles tels que, pour chaque paire p, q d'un même ou de deux distingués de tels intervalles, l'expression

$$f_x(x, y, q) - f_x(x, y, p) + p^{\alpha'} f_{y\alpha}(x, y, q) - q^{\alpha'} f_{y\alpha}(x, y, p)$$

ait un signe qui est précisé dans le travail. — Le procédé de l'A. se résume dans les mots suivantes: Considérée une suite de polygones $\Pi_n(y = y_n(x))$, tels que $F[y_n] \rightarrow \mu$ (où μ est la borne inf. de $F[y]$ dans la classe considérée), et que les $G^i[y_n]$ aient des valeurs données d'avance, on fait parmi les côtés de chaque Π_n des échanges, de manière que la valeur de $F[y_n]$ ne croît pas, tandis que celles des $G^i[y_n]$ ne changent pas. On atteint ainsi une suite de polygones chacun desquels peut être subdivisé, au plus, en k portions concaves ou convexes, de sorte qu'on peut faire usage du théorème de dérivation des séries de tels fonctions. Parmi les autres considérations desquelles on fait usage dans la démonstration, on doit remarquer les résultats de M. Tonelli relatifs au problème de l'approximation, au moyen de fonctions continues avec ses dérivées de premier ordre, d'une fonction $y(x)$ absolument continue, et de l'intégrale $F[y]$. — Le travail se termine avec un théorème, moins remarquable, d'existence du minimum, dans les problèmes isopérimétriques en forme paramétrique. *S. Cinquini (Pavia).*

Bliss, Gilbert A.: Definitely self-adjoint boundary value problems. *Trans. Amer. Math. Soc.* 44, 413—428 (1938).

The author introduces a modification of the definition given by him in 1926 (see *Trans. Amer. Math. Soc.* 28, 561—584) of "definite self-adjoint" boundary value problems involving a system of n linear equations $y'_i = [A_{i\alpha}(x) + \lambda B_{i\alpha}(x)] y_\alpha$ and boundary conditions of the form $M_{i\alpha} y_\alpha(a) + N_{i\alpha} y_\alpha(b) = 0$, $i, \alpha = 1, \dots, n$. The new definition enables him to retain most of the properties derived before; moreover,

it is applicable to the boundary value problems relating to calculus of variations problems involving only simple integrals, which was not the case with the earlier definition. It is shown that, under the condition of non-singularity and normality, the boundary value problem associated with the accessory problem of a problem of Bolza is definitely self-adjoint in the new sense. For the case $n = 2$, useful normal forms of the problem are indicated.

Arnold Dresden (Swarthmore).

Reid, William T.: A system of ordinary linear differential equations with two-point boundary conditions. *Trans. Amer. Math. Soc.* **44**, 508—521 (1938).

This paper shows that definitely self-adjoint boundary value problems, as formulated by Bliss (see the prec. review) are equivalent to the boundary value problems associated with the accessory problems of calculus of variations problems of the type discussed by the author [compare *Amer. J. Math.* **54**, 769 (1932); this *Zbl.* **5**, 299], provided the matrix $B_{i\alpha}(x)$ is of constant rank (see the prec. review). Sufficient conditions are given for the existence of an infinite sequence of characteristic values for boundary value problems of the type here considered.

Arnold Dresden.

Beke, Manó: Transversalität und Orthogonalität. *Mat. fiz. Lap.* **45**, 157—161 u. deutsch. Zusammenfassung 161 (1938) [Ungarisch].

In der durch $ds^2 = \sum a_{ik} dx_i dx_k$ erklärten Metrik fällt für ein Variationsproblem Transversalität und Orthogonalität dann und nur dann zusammen, wenn der Integrand die Form $\varphi(x_1 \dots x_n) ds$ hat. Bei Doppelintegralen $\iint F(x, y, z, p, q) dx dy$ deckt sich die Transversalität mit der Orthogonalität dann und nur dann, wenn

$$F = \varphi(x, y, z) \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

ist.

Harald Geppert (Gießen).

Sakellariou, N.: Über das Variationsrechnungsproblem in Parameterdarstellung im n -dimensionalen Riemannschen Raum. (2. Congr. Interbalkan. des Math., Bucarest, 12. IX. 1937.) *Bull. Math. Soc. Roum. Sci.* **40**, Nr 1/2, 171—174 (1938).

On fait voir qu'on peut considérer le problème du Calcul des Variations relatif aux courbes qui joignent deux points fixes de l'espace n -dimensional de Riemann, comme un particulier problème de Lagrange de l'espace $(n + 1)$ -dimensional.

Silvio Cinquini (Pavia).

Tonelli, Leonida: Un teorema di semicontinuità per i problemi di Mayer. (Firenze, 1.—3. IV. 1937.) *Atti 1. Congr. Un. Mat. Ital.* **127**—132 (1938).

L'A. donne une nouvelle condition suffisante pour la semi-continuité inférieure du fonctionnelle $u_{c,\alpha}(s)$ relatif à la courbe $c: [x = x(s), y = y(s), 0 \leq s \leq L]$, et à la condition initiale α , et définit par l'équation

$$u'_{c,\alpha}(s) = F(x(s), y(s), x'(s), y'(s), u_{c,\alpha}(s)),$$

où $F(x, y, x', y', u)$ est une fonction finie et continue avec ses dérivées F_x, F_y , est positivement homogène de degré un dans les x', y' , et a son rapport incremental relatif à u supérieurement borné. Dans ce théorème, tandis que les conditions relatives à la fonction F sont, comme dans les propositions que l'A. vient d'énoncer (ce *Zbl.* **16**, 121), de nature très générale, l'hypothèse relative à la fonction E de Weierstrass est plus étendue et très simple ($E \geq 0$); cependant cette condition exige que toutes les courbes de la classe considérée aient une longueur inférieure à un nombre fixe.

S. Cinquini (Pavia).

Kerner, Michael: Flächenprobleme der Variationsrechnung bei fester und variabler Begrenzung und für geschlossene Flächen. *Acta math.* **70**, 1—55 (1938).

Dans ce Mémoire sur les intégrales doubles du Calcul des Variations en forme paramétrique on étudie la condition de Jacobi sur une surface

$$\{x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)\} \quad (u, v) \text{ en } D,$$

où ces fonctions sont finies et continues avec leurs dérivées partielles du premier ordre, tandis qu'on considère comme surfaces de rapprochement seulement celles, qui peuvent être subdivisées en un nombre fini de parties pour chacune desquelles

est vérifiée telle propriété. — On considère les intégrales $\iint_D F(x, y, z, l, m, n) du dv$,

où $l = y_u z_v - y_v z_u, \dots$, F est une fonction analytique régulière pour chaque (x, y, z) d'un domaine donné d'avance et pour tous les l, m, n , pour lesquelles est $l^2 + m^2 + n^2 > 0$, F est toujours positive et positivement homogène de degré un. — La méthode suivie s'appuie sur des résultats de M. Lichtenstein pour les équations aux dérivées partielles (§ 5): pour chacun des trois problèmes étudiés [surfaces bornées par une courbe fermée donnée d'avance (§ 6); surfaces bornées par une courbe qui appartient à une surface donnée d'avance (§ 7); surfaces fermées (§ 8)] l'A. considère un problème „ajouté“ de valeurs limites pour ces équations, en exploitant des considérations sur la courbure des courbes et des surfaces transversales aux surfaces extrémales (§§ 3, 4). — Pour chacun des problèmes en question les résultats du Mémoire se résument dans les mots suivants: Soit Σ_0 une surface extrémale analytique et sans points doubles, pour laquelle soient vérifiées de manière forte les conditions de Legendre et de Weierstrass; alors: A) si la plus petite valeur singulière du problème ajouté est > 1 , la surface Σ_0 réalise un minimum relatif fort pour le problème du Calcul des Variations; B) si la surface Σ_0 réalise pour le problème en question un minimum relatif faible, la plus petite valeur singulière du problème ajouté doit être ≥ 1 .

Silvio Cinquini (Pavia).

Funktionentheorie:

Chow, Wei-Liang: Einfacher topologischer Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra. Math. Ann. 116, 463 (1939).

Deutet man die komplexen Zahlen x und y als Punkte auf den Kugelflächen K_x und K_y , so definiert

$$y = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

einen (singulären) 2-Zyklus Γ auf K_y , dessen Urbild K_x ist. Gäbe es einen Punkt auf K_y , der nicht von Γ überdeckt wird, so wäre $\Gamma \sim 0$. Andererseits läßt Γ sich durch eine Deformation in den durch $y = x^n$ definierten Zyklus Γ' überführen, der der n -fachen K_y homolog ist. Wir hätten dann $nK_y \sim \Gamma' \sim \Gamma \sim 0$, was unmöglich ist.

van der Waerden (Leipzig).

● Tricomi, Francesco: Funzioni analitiche. Bologna: Nicola Zanichelli 1936. VI, 110 pag. rilegato L. 35.—

Ein Abriß der klassischen Theorie analytischer Funktionen, wie er hier vorliegt, ist sachlich bestimmt durch den Zielpunkt des anschließenden zweiten Bandes, welcher doppelperiodische Funktionen untersucht. Verf. baut also die Darstellungsmittel der Weierstrassschen Schule wie Reihen- und Produktentwicklungen in hinreichendem Umfang aus; zugleich werden dem Leser die wichtigsten Züge der elementartranszendenten Kreisfunktionen und ihrer Umkehrungen nahegebracht. Beides erwächst aus den grundlegenden Integralsätzen, welche vom örtlichen Verhalten einer analytischen Funktion auf ihre Eigenschaften im großen schließen lassen. Unter den Hilfsbegriffen, welche zur Versinnlichung der Funktionenlehre dienen können, bevorzugt Verf. das stationäre ebene Strömungsfeld, was dem aerodynamisch interessierten Leser willkommen sein wird. Auch Betragsflächen und Höhenkarten sind zur Veranschaulichung in geschickter Auswahl eingestreut. — Alles in allem eine leicht lesbare Übersicht über die Grundtatsachen, welche im anschließenden Band Verwendung finden.

Maier (Greifswald).

● Tricomi, Francesco: Funzioni ellittiche. (Monogr. di mat. appl. per cura d. consiglio naz. d. ricerche. Nr. 248.) Bologna: Nicola Zanichelli 1937. IX, 274 pag. e 41 fig. rilegato L. 45.—

Wenn jungen Wahrheiten nur ein kurzes Siegesfest vergönnt ist, und wenn seit einem halben Jahrhundert die Provinz der elliptischen Funktionen meist nur als Etappe erscheint für die Front mathematischer Forschung, dann kann eine Einzelschrift wie die hier vorliegende geplant sein entweder als Brücke, welche eine ausgereifte Theorie zur Geltung bringt in Anwendungen geometrischer, physikalischer

und technischer Art. Oder aber sie übernimmt die verschiedenen Ausprägungen einer und derselben Idee, wie wir sie ererbt haben mit der Absicht, solche zu verschmelzen. — Daß hier eine alte Wunde brennt, unterstreicht der Autor, wenn er auf der letzten Seite aus 6 verschiedenen Zeichensprachen die von ihm bevorzugte zusammenstellt. Und diese schwankenden Bezeichnungen sind ja nur ein äußeres Symptom der Unruhe, die dem Widerstreit gegenläufiger Angriffsrichtungen entstammt: Hie Weierstrass, dort Jacobi. Daß der Weierstrasssche Ansatz als begriffliches Skelett der Theorie den Vorzug verdient, ist heute nicht mehr umstritten. Aber je mehr der praktische Rechner auf tabellierte Funktionswerte angewiesen ist, desto günstiger schneiden die nur zweiparametrischen Jacobischen Funktionen ab. Die Thetareihen insbesondere empfehlen sich dem Praktiker durch ihr einzigartiges Konvergenzverhalten wie dem Theoretiker als Instrument der höheren Arithmetik. Und so wird man Herrn Tricomis Standpunkt nur teilen können, daß Weierstrass und Jacobi in wesentlichen Begriffsbildungen festzuhalten sind, vor allem betreffend das Funktionenpaar $p(u)$ und $\vartheta_1(v)$. Als wünschenswert wäre freilich anzustreben, das aus historischen Gründen vielfach noch bestehende Nebeneinander konkurrierender Bezeichnungen etwas einzudämmen. — Der Schwerpunkt des Buches liegt aber im Feld der angewandten Mathematik. Nachdem 3 einleitende Kapitel die Gesichtspunkte von Weierstrass, Legendre und Jacobi zur Geltung brachten und als vereinigendes 4. Kapitel die Transformationslehre behandelt wurde, gipfelt das letzte Kapitel in fünf zweckmäßig abgegrenzten Beispielen. — Wie der theoretische Aufbau der Modulfunktionen bis an moderne Probleme, nämlich die quadratischen Integralgleichungen von Bernstein und Doetsch herangeführt wird, so findet sich als aerodynamische Anwendung auch das Auftriebsfeld des Doppeldeckers nach Lagally berührt. — Im ganzen ein gediegenes, besonders für Praktiker empfehlenswertes Buch. *Maier* (Greifswald).

Călugăreanu, G.: Sur les invariants de prolongement des fonctions entières. (2. Congr. Interbalkan. des Math., Bucarest, 12. IX. 1937.) Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 40, Nr 1/2, 123—124 (1938).

The following theorem is proved: If $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, and $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |a_n|}{n c_n} = -A > 0$,

where $c_n \uparrow \infty$ [hence $f(z)$ is an entire function], then A is an "invariant of analytical

continuation", i. e. let z_0 be any point, and $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n (z-z_0)^n$, then $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |a'_n|}{n c_n} = -A$, independent of z_0 .

Otto Szász (Cincinnati, Ohio).

Milloux, Henri: Une inégalité nouvelle dans la théorie des fonctions méromorphes. C. R. Acad. Sci., Paris 208, 31—32 (1939).

Voranzeige eines Seitenstücks zum II. Hauptsatz, wo die Anzahlfunktion in bezug auf α -Stellen der Ableitung f' auf neue Art neben Anzahlfunktionen für f erscheint, während das Restglied die üblichen Bedingungen erfüllt. Anwendung auf Beziehungen für die Ausnahmewerte der Ableitung. *Ulrich* (Gießen).

Ilieff, Lubomir: Über die Nullstellen gewisser Integraalausdrücke. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 48, Abt. 1, 169—172 (1939).

L'A. dimostra che se p, q e n sono numeri interi ($p \geq 0, q > 0, n > 1$), il polinomio

$$P_{p,n}(z) = \int_{-1}^1 (1 - t^{2q})^p \cdot (1 + itz)^n \cdot dt$$

possiede soltanto radici reali e semplici. Ne deduce una dimostrazione elementare della proposizione di G. Pólya: Se q è un numero naturale, la funzione intera

$F(z) = \int_0^{\infty} e^{-t^{2q}} \cdot \cos t z dt$ ha tutte le radici reali.

Sandro Fuedo (Roma).

Anghelutza, Th.: Sur une propriété qui caractérise la transformation conforme. (2. Congr. Interbalkan. des Math., Bucarest, 12. IX. 1937.) Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 40, Nr 1/2, 85—86 (1938).

Converse of a theorem of Tzitzéica (this Zbl. 5, 108). Macintyre (Aberdeen).

Fedoroff, V. S.: Sur les polynômes d'une variable complexe. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 20, 639—640 (1938).

Soit D un domaine ouvert, convexe et borné, F sa frontière, $|D|$ son aire, $S(D)$ l'aire de la surface riemannienne décrit par le polynome de degré n $f(z)$. L'aut. donne, sans démonstration, l'inégalité $2^{2n-2} \cdot n^{2n-1}(2n-1)S(D) \geq |f'(z_0)| |D|$, $z_0 \in D + F$. Pour des familles particulières de polynomes on peut abaisser le coefficient de $S(D)$. Lorsque D est un cercle on peut prendre n^2 . Suivent quelques limitations inférieures de $\int_D |f(z)|^2 d\sigma / |P(z^*)|^2$ D étant connexe et $z^* \in F$. Si L est la longueur de la courbe

décrite par $f(z)$ lorsque z décrit un segment rectiligne de longueur d issu de z_0 , on a $2^{n-1}nL \geq |f'(z_0)|d$. Si $f'(z)$ ne s'annule pas dans $|z - z_0| \leq d$, on peut remplacer le coefficient de L par n . T. Popoviciu (Cernăuți, Roumanien).

Behnke, H., und K. Stein: Approximation analytischer Funktionen in vorgegebenen Bereichen des Raumes von n komplexen Veränderlichen. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen I, N. F. 1, 195—202 (1939).

Der Begriff der regulären Ausdehnung eines Regularitätsbereiches \mathfrak{B} auf einen Regularitätsbereich \mathfrak{B}^* , der im Endlichen durch eine kontinuierliche, \mathfrak{B} umfassende Schar $\mathfrak{B}(t)$ von Regularitätsbereichen, die \mathfrak{B} in \mathfrak{B}^* überführt, definiert ist, wird auf beliebige (auch unbeschränkte) endlichblättrige Bereiche über dem Raum der z_1, z_2, \dots, z_n übertragen. Sodann wird gezeigt, daß die reguläre Ausdehnbarkeit eines Regularitätsbereiches \mathfrak{B} auf einen Regularitätsbereich \mathfrak{B}^* eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß alle in \mathfrak{B} regulären Funktionen sich im Innern von \mathfrak{B} durch Funktionen, die in \mathfrak{B}^* eindeutig und regulär sind, gleichmäßig approximieren lassen. An einem Beispiel wird nachgewiesen, daß es beschränkte Bereiche mit zusammenhängender Randmannigfaltigkeit gibt, die nicht ausdehnbar sind.

Fritz Sommer (Berlin-Charlottenburg).

Severi, Francesco: Relazioni fra i periodi degli integrali multipli d'una varietà algebrica. Mem. Accad. Ital. 9, 121—146 (1938).

Aus der Tatsache, daß auf einer algebraischen Fläche ein Doppelintegral 1. Gattung u durch Angabe der Realteile seiner Perioden festgelegt ist, beweist Verf., daß zwischen diesen Perioden $R_2 - 2p_g$ (für alle u gleichlautende) unabhängige reelle lineare homogene Relationen bestehen ($R_2 = 2\dim.$ topol. Zusammenhangszahl). Unter diesen finden sich ρ (= Severische Basiszahl) unabh. ganzzahlige Gleichungen, und aus einem Satze von Lefschetz folgt, daß alle anderen ganzzahligen Relationen von diesen ρ linear abhängen. Am Beispiel der Jacobischen hyperell. Fläche werden diese Verhältnisse erläutert; sie finden Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen. — Periodenrelationen höheren Grades gewinnt Verf. durch Bildung des topologischen Produkts aus zwei oder mehreren Exemplaren V_r, V'_r, \dots einer algebraischen Mannigfaltigkeit V_r . Sind ω, ω', \dots abelsche Differentiale k -ten Grades auf V_r, V'_r, \dots , so gibt $\omega \cdot \omega' \dots$, integriert über einen $2k$ -dim. algebraischen Zyklus (allgemeiner: ciclo a periodi nulli) von $V_r \cdot V'_r \dots$, eine Periodenrelation, die plurilinear oder (im Falle gerader k) von höherem Grade sein kann. Für gerade k finden sich darunter symmetrische, für ungerade k alternierende plurilineare Relationen. Bilineare bzw. quadratische Relationen gibt es in jedem Falle, und zwar sogar mit von 0 verschiedener Determinante, wie aus einem anderen von Verf. angegebenen Verfahren der Herstellung von Periodenrelationen folgt. — Verf. zeigt, daß eine abelsche Mannigfaltigkeit V_p , deren Elementarteiler = 1 sind, durch folgende Eigenschaften als Jacobische Mannigfaltigkeit gekennzeichnet werden kann: V_p enthält eine $(p-2)$ -dim. algebr. E_{p-2} , die im Schnitt von p Nullstellen- M_{p-1} der Thetafunktionen 1. Ordnung wie $p!-1$

Punkte zählt. Durch E_{p-2} geht eine einf. unendliche Schar von Nullstellen- M_{p-1} vom Index p . — Diese Aussagen führen bei Übersetzung ins Topologische zu Periodenrelationen, die vermutlich in der Frage der Kennzeichnung der Jacobischen Mannigfaltigkeiten eine wesentliche Rolle spielen werden. Die Bedeutung der Periodenrelationen für das Problem der Moduln der algebr. Flächen erläutert Verf. am Beispiel der regulären Flächen mit kanonischen Kurven der Ordnung 0. Die 22 Perioden des Doppelintegrals dieser Flächen genügen einer ganzzahligen linearen und einer ganzzahligen quadratischen Relation, und das Verhältnis der so gebundenen Perioden entspricht den 19 Moduln der Scharen jener Flächen. *Kähler*

Giambelli, Giovanni: La configurazione di Lefschetz e le funzioni di più variabili complesse. Atti Accad. Peloritana Messina 39, 62—70 (1937).

Elementary observations are made about known geometrical configurations (round manifolds and products of circles) useful in the theory of functions of several complex variables. *Achille Bassi* (Bologna).

Fuchs, B.: Zur Theorie der schlichten pseudokonformen Abbildungen. Mitt. Forsch.-Inst. Math. u. Mech. Univ. Tomsk 2, 147—153 u. deutsch. Zusammenfassung 154—155 (1938) [Russisch].

Die Einführung der sog. Kernfunktion $K_{\mathfrak{B}^4}(z_1, z_2; \bar{z}_1, \bar{z}_2)$ für jeden Bereich \mathfrak{B}^4 des $z_1 z_2$ -Raumes erlaubt es, in der Theorie der pseudokonformen Abbildungen (ps. Abb.) analoge Methoden wie im Falle der konformen Abb. heranzuziehen. Insbesondere wurde dieser Weg bei der Untersuchung von schlichten ps. Abb. eingeschlagen und auf diese Weise untere Schranken für das Produkt des Abstandes zweier Randpunkte von $\{0, 0\}$ eines aus \mathfrak{B}^4 mittels einer normierten, schlichten ps. Abb. hervorgegangenen Bereiches angegeben [J. reine angew. Math. 162, 256—263 (1931)]. — In Verallgemeinerung dieser Methode erhält Verf. für den Abstand E_k , $k = 1, 2$, von zwei Randpunkten P_k eines konvexen Bereiches, der mittels einer in bezug auf $\{0, 0\}$ normierten, schlichten ps. Abb. aus \mathfrak{B}^4 hervorgeht, die Abschätzung:

$$\frac{1}{K_{\mathfrak{B}^4}(0, 0; 0, 0)} \leq \frac{1}{\sin \varepsilon} \prod_{k=1}^2 16 E_k^2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_k}{2} \right) \left[\pi - \varphi_k - \frac{\frac{1}{2}\pi - \varphi_k - \cos \varphi_k}{1 - \sin \varphi_k} \right],$$

wobei ε der Winkel zwischen den analytischen Tangentialebenen in den betrachteten Punkten ist, und $\cos \varphi_k$ das Verhältnis der Abstände der Tangentialhyperebene und der analytischen Tangentialebene in P_k von $\{0, 0\}$ bedeutet. — Weiter betrachtet der Verf. den Randpunkt P eines Bereiches \mathfrak{M}^4 , der auf der Schnittfläche zweier Randhyperflächen liegt, deren Tangentialhyperebenen im Punkte P die Gestalt $\operatorname{Re}[a_k z_1 + b_k z_2] = L_k \cos \varphi_k$, $0 \leq \varphi_k \leq \pi/2$, $|a_k|^2 + |b_k|^2 = 1$, $k = 1, 2$, haben. Besitzt die analytische Hyperebene $(a_1 z_1 + b_1 z_2 - L_1) - \lambda(a_2 z_1 + b_2 z_2 - L_2) = 0$, $-\infty < \lambda < \infty$, die Eigenschaft, daß die analytischen Ebenen, aus denen sie besteht, für $\lambda < 0$ ganz außerhalb von \mathfrak{M}^4 liegen und für $\lambda > 0$ durch die Schnittlinie der erwähnten Tangentialhyperebenen in zwei Teile zerlegt werden, von denen der eine ebenfalls außerhalb von \mathfrak{M}^4 liegt, so gilt für den Abstand E zwischen P und $\{0, 0\}$ die Ungleichung

$$\frac{1}{K_{\mathfrak{M}^4}(0, 0; 0, 0)} \leq \frac{256 \pi E^4}{\sin \varepsilon} \cos^2 \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \cdot \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2} \right) \cdot \left[\pi - \varphi_2 - \frac{\frac{1}{2}\pi - (\varphi_2 + \cos \varphi_2)}{1 - \sin \varphi_2} \right],$$

wobei $\varepsilon = \arcsin |a_1 b_2 - a_2 b_1|$ den Winkel zwischen analytischen Tangentialebenen bedeutet. *Stefan Bergmann.*

Manià, Basilio: Sulle funzioni quasi analitiche. (Firenze, 1.—3. IV. 1937.) Atti 1. congr. Un. Mat. Ital. 140—142 (1938).

Der vom Verf. angegebene Satz über quasianalytische Fourierreihen ist in einem Ergebnis von Carleman enthalten (vgl. Fonctions quasi analytiques, Paris 1926, S. 91). *Beurling* (Uppsala).

Vignaux, J. C.: Sur les fonctions polygènes d'une et de plusieurs variables complexes duales et de variables biduales. I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 27, 514—518 (1938).

Vignaux, J. C.: Sulle funzioni poligene di una variabile bicomplessa duale. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 27, 641—645 (1938).

Eigenschaften der Funktionen einer dualen (vgl. dies. Zbl. 14, 167) Veränderlichen $z = x + ky$ ($k^2 = 0$), $w = f(z) = u + kv$. Es tritt z. B. an Stelle der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen: $\partial u / \partial y = 0$, $\partial u / \partial x = \partial v / \partial y$. L. Schrutka (Wien).

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung, mathematische Statistik:

Bonferroni, Carlo: Sulla probabilità totale di eventi numerabili. (Firenze, 1.—3. IV. 1937.) Atti 1. Congr. Un. Mat. Ital. 402—406 (1938).

Die Gültigkeit des Additionstheorems für die Wahrscheinlichkeiten von abzählbar unendlich vielen Ereignissen ist mit einfachen und natürlichen Bedingungen unvereinbar; Verf. lehnt sie deshalb ab und stellt einige Entwicklungen und Betrachtungen der so verallgemeinerten Theorie an. Bruno de Finetti (Trieste).

Feller, W.: Note on regions similar to the sample space. Statist. Res. Mem., Univ. London 2, 117—125 (1938).

Es sei $p(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_l)$ eine im euklidischen Raum R_n definierte und von den Parametern $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_l$ abhängige Wahrscheinlichkeitsdichte; Verf. untersucht, ob immer solche Bereiche w vorhanden sind, daß die entsprechende Wahrscheinlichkeit $\int_w p dx_1 dx_2 \dots dx_n$ von den θ_i unabhängig ist. Bei Anwendung des Carlemanschen Eindeutigkeitssatzes für das Momentenproblem wird an mehreren Beispielen gezeigt, daß solche Bereiche im allgemeinen nicht existieren.

Bruno de Finetti (Trieste).

Salvemini, Tommaso: Legge di frequenza di una variabile casuale somma di variabili dipendenti. (Firenze, 1.—3. IV. 1937.) Atti 1. Congr. Un. Mat. Ital. 421—425 (1938).

Es sei in bekannter Form durch die Wahrscheinlichkeiten $p_{i_1 i_2 \dots i_h} = P(E_{i_1} E_{i_2} \dots E_{i_h})$ die Wahrscheinlichkeit P_k ausgedrückt, daß von den n Ereignissen E_1, E_2, \dots, E_n k wirklich zutreffen. Setzt man $p_{i_1 i_2 \dots i_h} = p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_h} + \delta_{i_1 i_2 \dots i_h}$ ($= p^h + \delta_{i_1 i_2 \dots i_h}$, wenn $p_i = p$), so ist offenbar $P_k = P_k^* + \Delta_k$, worin P_k^* die Wahrscheinlichkeit P_k im Falle der Unabhängigkeit der E_1, \dots, E_n voneinander darstellt und Δ_k ein Glied ist, das nur von den $\delta_{i_1 i_2 \dots i_h}$ (und zwar von den $\delta_k^* = \sum \delta_{i_1 i_2 \dots i_h}$) abhängt.

Bruno de Finetti (Trieste).

Dell'Agnola, Carlo Alberto: Sulla tendenza ad una variabile casuale limite di una successione di variabili casuali punteggiate discontinue. (Firenze, 1.—3. IV. 1937.) Atti 1. Congr. Un. Mat. Ital. 398—401 (1938).

Zusammenfassung einer früheren Abhandlung desselben Titels (s. dies. Zbl. 17, 271).

Borel, Émile: Sur un problème continu analogue au battage des cartes. C. R. Acad. Sci., Paris 208, 135—136 (1939).

Prenons, sur un segment donné OA , deux points P_1 et Q_1 au hasard. Ce segment est ainsi divisé en trois segments que nous désignons par α, β, γ à partir de la gauche, c'est à dire du point O ; nous ferons glisser ces segments, sans les retourner, de manière à les mettre, soit dans l'ordre $\beta\alpha\gamma$ (opération A), soit dans l'ordre $\alpha\gamma\beta$ (opération B). Nous admettrons que, lorsque cette „opération élémentaire“ est répétée plusieurs fois de suite, on fait soit alternativement les opérations A et B , soit chacune de ces opérations avec une probabilité déterminée et voisine de $\frac{1}{2}$. Après avoir effectué $(n-1)$ fois de suite l'opération élémentaire, les éléments du segment OA se trouvent brouillés et constituent un segment $O_n A_n$, renfermant tous les points de OA , rangés dans un ordre différent. Fixons une longueur h petite par rapport à OA et considérons sur le segment OA tous les intervalles $x \dots x+h$, situés sur OA , c'est à dire que si l'on prend O comme origine et OA comme unité de longueur, x varie de 0 à $1-h$. Parmi ces segments, il en est qui se trouveront conservés intacts sur $O_n A_n$; les valeurs de x correspondantes forment un ensemble dont la mesure sera désignée par $\varphi_n(h)$. $\varphi_n(h)$ tend vers l'unité lorsque h tend vers zéro, quel que soit n . Si h croît à partir de zéro, on trouvera une valeur a de h telle que pour h supérieur ou égal à a , $\varphi_n(h)$ sera égal à zéro. Si, au lieu d'envisager $(n-1)$ opérations élémentaires déterminées, nous considérons l'ensemble des

($n - 1$) opérations qui peuvent être conçues par tous les choix possibles faits au hasard, on devrait seulement parler des probabilités relatives au brouillage. L'auteur donne des indications sur quelques procédés qui facilitent l'étude du degré du brouillage. *B. Hostinský.*

Yosida, Kôsaku, and Shizuo Kakutani: Application of mean ergodic theorem to the problems of Markoff's process. Proc. Imp. Acad. Jap. 14, 333—339 (1938).

Es ist bekannt, daß die Ergodentheorie auch auf stochastische Prozesse anwendbar ist. Wie Verff. zeigen, ist es zweckmäßig, den Ergodensatz von v. Neumann auf Banachsche Räume und lineare Operatoren in ihnen auszudehnen. Damit ergibt sich ein einheitlicher und einfacher Weg zu allgemeinen Grenzwertsätzen bei Markoffschen Ketten, die hier zum Teil unter schwächeren Voraussetzungen als bisher bewiesen werden.

Folgender Satz wird zunächst bewiesen: B sei ein reeller oder komplexer Banachscher Raum, T ein linearer Operator, der B auf sich oder einen Teil von B abbildet. Die Normen der Iterierten $\|T^n\|$, $n = 1, 2, \dots$, seien gleichmäßig beschränkt. Ferner existiere ein schwach vollstetiger Operator V und ein natürliches k derart, daß $\|T^k - V\| < 1$ gilt. Dann existiert für jedes x in B der starke Limes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} T^\nu x = T_1 x; \quad T T_1 = T_1 T = T_1^2 = T_1.$$

T_1 ist der Projektionsoperator, der B auf den Raum der y mit $Ty = y$ abbildet (Eigenraum von T für den Eigenwert $\lambda = 1$). — Dann wird bewiesen, daß die Dimensionszahl dieses Eigenraumes gleich der Höchstanzahl der linear unabhängigen linearen Funktionale $X(x)$ in B ist, welche der Gleichung $X(Tx) = X(x)$ für alle x in B genügen (von S. Mazur unter stärkeren Voraussetzungen bewiesen). — Davon werden Anwendungen auf Markoffsche Prozesse gemacht. Sei

$$P(\xi, E) = \int_E p(\xi, \eta) d\eta, \quad p \geq 0, \quad P(\xi, \Omega) = 1,$$

die Übergangswahrscheinlichkeit, daß der Punkt ξ des Intervalles $\Omega = \langle 0, 1 \rangle$ in eine Menge E in Ω fällt. Wiederholte Übergänge seien unabhängig voneinander. Die Bedingung von Doob sei erfüllt: Mit $m(E) = \int_E d\eta$ soll gleichmäßig in ξ auch $P(\xi, E)$ beliebig klein werden. —

Folgendes wird unter diesen Voraussetzungen bewiesen: Der für den Prozeß fundamentale Operator

$$Tf = \int_0^1 f(x) p(x, y) dx$$

bildet den Raum L^1 der summierbaren f auf sich ab, hat die Norm Eins und ist in L^1 schwach vollstetig. Ferner: T hat nur endlich viele Eigenwerte vom Betrage Eins. Jeder solche Eigenwert ist eine Einheitswurzel und von endlicher Vielfachheit. Die Anwendung des Ergodensatzes liefert allgemeiner als bei Fréchet: Es gibt ein meßbares $p_\infty(\xi, \eta)$ derart, daß für jedes f in L^1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left| \int_0^1 f(\xi) \left\{ \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} p^{(\nu)}(\xi, \eta) - p_\infty(\xi, \eta) \right\} d\xi \right| d\eta = 0$$

ist, wo $p^{(\nu)}$ die Wahrscheinlichkeitsdichten der iterierten Übergänge bedeuten. Vieles davon bleibt unter einer viel schwächeren Bedingung von W. Doeblin richtig. *E. Hopf* (Leipzig).

Guttman, Louis: A note on the derivation of formulae for multiple and partial correlation. Ann. math. Statist. 9, 305—308 (1938).

Beweis der wohlbekannten Formeln:

$$b_{\mu\nu.1, \dots, \mu-1, \mu+1, \dots, \nu-1, \nu+1, \dots, n} = -A_{\mu\nu}/A_{\mu\mu}, \quad (\mu \neq \nu)$$

$$r_{\mu\nu.1, \dots, \mu-1, \mu+1, \dots, \nu-1, \nu+1, \dots, n} = -A_{\mu\nu}/\sqrt{A_{\mu\mu} A_{\nu\nu}} \quad (\mu \neq \nu)$$

und

$$r_{\mu\mu.1, \dots, \mu-1, \mu+1, \dots, n}^2 = 1 - \frac{A}{a_{\mu\mu} A_{\mu\mu}};$$

dabei ist $A = |a_{\mu\nu}|$ ($\mu, \nu = 1, \dots, n$) die Determinante der gemischten Momente zweiter Ordnung von einer Anzahl von n -dimensionalen zufälligen Variablen, die dieselbe Verteilungsfunktion besitzen. *W. Simonsen* (Kopenhagen).

Tricomi, F.: Les transformations de Fourier, Laplace, Gauss, et leurs applications au calcul des probabilités et à la statistique. Ann. Inst. H. Poincaré 8, 111—149 (1938).

The author discusses a number of known results, mostly on Laplace integrals, with reference to their application in statistics. Special stress is laid on the practicability of the methods and the paper concludes with a method for finding the Gaussian distribution functions corresponding to observed data. *Offord* (London).

Madow, William G.: Contributions to the theory of multivariate statistical analysis. Trans. Amer. Math. Soc. **44**, 454—495 (1938).

The author coordinates and extends recent results of R. A. Fisher, Cochran, Hotelling, Wilks, and others on the distribution of selected statistics occurring in the generalized analysis of variance in comparative analysis (meaning thereby statistical analysis in which the effects of certain types of selection must be excluded) and in other studies of relations between sets of variables. Thirteen theorems and many corollaries deal primarily with the Fisher-Cochran theorem on a necessary and sufficient condition that a set of quadratic forms in normally and independently distributed chance variables be themselves independently distributed with a joint probability density which is a product of Chi-square distributions; and with generalizations thereof involving linear transformations of Borel-measurable functions. Various problems of sufficient statistics are treated, in particular an expression for the probability density for any system of sufficient statistics is obtained. Expressions for the joint probability density, joint moments, and possible ranges for certain transformed systems of sufficient statistics are secured. Applications are made to the correlation tetrad difference and to some of its generalizations. A bibliographical list is given of 34 references to recent papers.

Albert A. Bennett (Providence).

Moulton, E. J.: The periodic function obtained by repeated accumulation of a statistical series. Amer. Math. Monthly **45**, 583—586 (1938).

On the basis of calculation with certain discrete series accepted as random, the outcome of a certain iterative linear process was found to be a periodic function. This remarkable result is here explained and proved on theoretical grounds. The "first accumulation" of a function on a finite interval is defined by use of a linear operator. It is shown that the conjecture that successive accumulations of an arbitrary function representable by a Fourier series convergent in the interval, approach a given cosine form is indeed demonstrable, the proof being given in full.

Albert A. Bennett.

Stene, Sverre: A preliminary note on tests of significance and problems of goodness of fit. (Statens Inst. f. Folkehelsen, Oslo.) Norske Vid. Selsk., Forh. **11**, 68—71 (1938).

In this preliminary note the author considered three types of statistical distributions that might be examined with the object of determining whether given observed probabilities may be regarded as a random sample from an infinite universe with a range from zero to unity and with a constant frequency distribution. These are: A. The distribution of the arithmetic mean; B. the distribution of the mean square deviation from a theoretical mean; C. the ω^2 -distribution. These distributions are continuous but not smooth. They consist of a number of analytic branches. For A, satisfactorily complete results have been obtained, but much remains to be learned for B and C although for $n = 2$ or 3 complete conclusions are already found.

Albert A. Bennett.

Castellano, Vittorio: Studi italiani riguardanti il calcolo delle probabilità e la statistica metodologica, negli anni XIV—XV E. F. (26. riun., Venezia, 12.—18. IX. 1937.) Atti Soc. ital. Progr. Sci. **2**, 91—108 (1938).

Pearson, E. S.: „Student“ as a statistician. Biometrika **30**, 210—250 (1939).

McMullen, L.: „Student“ as a man. I. Biometrika **30**, 205—210 (1939).

David, F. N., and J. Neyman: Extension of the Markoff theorem on least squares. Statist. Res. Mem., Univ. London **2**, 105—116 (1938).

Beaucoup d'auteurs qui ont exposé la méthode des moindres carrés admettent que les erreurs sont indépendantes les unes des autres et qu'elles sont distribuées suivant la loi de Gauss (distribution normale). A. A. Markoff (Calcul des probabilités. Moscou 1924. 4. ed., russe; traduction: Wahrscheinlichkeitsrechnung. Leipzig 1912.) a montré que l'on peut développer cette méthode sous des hypothèses plus générales et qu'il n'est pas nécessaire d'admettre la distribution normale. Plusieurs chercheurs ont travaillé sur ce problème [voir notamment A. C. Aitken, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **55**,

42 (1935); ce Zbl. 11, 266]. — Les auteurs suivent dans leur exposition la voie indiquée par Markoff; l'article a un caractère didactique, il a été rédigé par l'un des auteurs d'après les leçons données par l'autre.

B. Hostinsky (Brünn).

Wolf, H.: Über die Eigenschaften der plausibelsten Geraden einer fehlerzeigenden Punktreihe. Z. Instrumentenkde. 58, 429—442 (1938).

Für gemessene Wertepaare u_i, r_i wird bekanntlich nach Einführung der fingierten Verbesserungen

$$v_i = mu_i + b - r_i$$

und passender Gewichte p_i mittels $[p v v] = \min$ eine Ausgleichsgerade $r = mu + b$ gefunden. Alle Punkte $z = r \pm \mu_r$ (μ_r = mittlerer Fehler von r) zu beiden Seiten dieser Ausgleichsgeraden liegen auf einer Hyperbel. Ferner hüllen alle Geraden m', b' , für welche $[p v' v'] = \text{konst.} > [p v v]$, für jeden Wert der Konstanten eine Hyperbel ein. Für einen besonderen Wert der Konstanten ist die zweite Hyperbel mit der ersten identisch („mittlere Fehlerhyperbel“). Die Benutzung von Hyperbeln als Genauigkeitsmaße geht auf A. Basch, S.-B. Akad. Wiss. Wien 123 (1914) zurück. Vier Zahlenbeispiele.

Theodor Zech (Darmstadt).

Ugolini, Giovanni B.: I procedimenti statistici e la idrologia. (Firenze, 1.—3. IV. 1937.) Atti 1. Congr. Un. Mat. Ital. 693—698 (1938).

Beweis, daß die spezielle Bernoullische Verteilung $\binom{n}{v} \frac{1}{2^n}$ mit wachsendem n gegen die Gaußsche Verteilung strebt, ohne Benutzung der Stirlingschen Formel. Die Arbeit enthält elementare Rechenfehler.

J. Meizner (Gießen).

Jacob, Mosè: Sul teorema limite nel calcolo della probabilità. (Firenze, 1.—3. IV. 1937.) Atti 1. Congr. Un. Mat. Ital. 417—420 (1938).

Die notwendige und hinreichende Bedingung, daß eine Folge von Verteilungsfunktionen $\{U_n\}$ gegen eine Verteilungsfunktion U konvergiert, ist, daß auch die Folge $\{\varphi_n\}$ der charakteristischen Funktionen von $\{U_n\}$ gegen eine Funktion φ konvergiert (φ charakteristische Funktion von U). Dieser Satz wird auf direktem Wege unter Verwendung von Sätzen über Funktionaloperationen (Fouriersche Integrale) bewiesen.

F. Knoll (Wien).

Dodd, Edward L.: Interior and exterior means obtained by the method of moments. Ann. math. Statist. 9, 153—157 (1938).

Wenn die Verteilungsfunktion $F\left(\frac{x-k}{a}\right)$ einer zufälligen Größe X bis auf die Parameter a und k vorgegeben ist und a, k durch die beobachteten Werte X_1, X_2, \dots, X_n nach der Momentenmethode ermittelt werden, so ergeben sich k und a als „Mittelwerte“ der X_k bzw. der Abweichungen $|X_k - \bar{X}|$ im Sinne der allgemeinen Definition von Chisini; k gibt ein Beispiel eines nicht immer „internen“ Mittelwertes.

Bruno de Finetti (Trieste).

Chlodovsky, L.: Le problème des moments et les polynômes de S. Bernstein. C. R. Acad. URSS, N. s. 19, 659—661 (1938).

The author establishes a connection between Hausdorff's moment problem and the moment problem of Stieltjes: to find a non-decreasing $\varphi(x)$ satisfying the relations

$$C_k = \int_0^\infty x^k d\varphi(x) \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (1)$$

A sequence $\{C_k\}$ is said to be completely monotone in the interval $(0, h)$ ($h > 0$) if

$$\Delta_h^p C_k = h^{-k} C_k - \binom{p}{1} h^{-k-1} C_{k+1} + \dots \pm h^{-k-p} C_{k+p} \geq 0 \quad (k, p = 0, 1, \dots).$$

A sequence $\{C_k\}$ is said to be almost completely monotone, if there exists a matrix $\{C_{k,n}\}$ ($k, n = 0, 1, \dots$) with the following properties: (1) The n^{th} row $C_{0,n}, C_{1,n}, C_{2,n}, \dots$ is completely monotone in some interval $(0, h_n)$, (2) $C_{k,n} \rightarrow C_k$, (3) $h_n/n \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. Theorem: The moment problem (1) has a solution if and only if the sequence $\{C_k\}$ is almost completely monotone. Moreover, a necessary and sufficient condition that

the problem (1) be determined is stated in terms of a convergence condition on all approximating matrices $\{C_{k,n}\}$ corresponding to the almost completely monotone sequence $\{C_k\}$. Extensive use of Bernstein's polynomials is made in the proof.

I. J. Schoenberg.

Pólya, Georges: Sur l'indétermination d'un problème voisin du problème des moments. C. R. Acad. Sci., Paris **207**, 708—711 (1938).

Zu einer beliebigen Zahlenfolge a_n gibt es immer Funktionen von beschränkter Schwankung $\Psi(x)$, so daß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n d\Psi(x) = a_n, \quad n = 0, 1, \dots$$

Verf. beweist, als Erweiterung eines früheren Resultats von R. P. Boas jr., diesen Satz ohne jede einschränkende Voraussetzung über die Zahlenfolge a_n , und ergänzt sein Ergebnis durch einige Angaben über die Natur einiger speziellen Lösungen des Momentenproblems.

Rolf Nevanlinna (Helsinki).

Physikalische Statistik:

La Paz, Lincoln: Mathematical theory of the vertical distribution of iron meteorites. Astron. Nachr. **267**, 107—112 (1938).

Verf. studiert die Verteilung der Eisenmeteore unter der Erdoberfläche. Unter den Annahmen, daß die Meteore kugelförmig sind und daß Meteore von gleichem Radius in gleicher Tiefe liegen, ferner daß in gleichen Zeiten gleichviel Meteore eines bestimmten Radius auf die Erde fallen, leitet er eine Formel für die Tiefenverteilung der meteorischen Eisenmasse ab. Die Schlüsse, die man mit ihrer Hilfe aus der heutigen Kenntnis von den Eisenmeteoriten ziehen kann, sind aber sehr unsicher. *E. Hopf.*

Peter, J. R.: Studie über die Abbildung der Zusammenstöße zwischen Gruppen elastischer Kugeln im Geschwindigkeitsraum (Ableitung des Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilungssatzes). Helv. phys. Acta **11**, 587—606 (1938).

Um zu einer Herleitung des Maxwell'schen Geschwindigkeitsgesetzes in einem binären Gasmisch auf rein geometrischer Grundlage zu gelangen, werden zunächst die Gasmoleküle durch elastische, glatte und quasistarre Kugeln mit zwei verschiedenen Massen ersetzt. Jede Kugel wird im Geschwindigkeitsraum mit den Geschwindigkeitskomponenten ξ, η, ζ als kartesischen Koordinaten durch einen Punkt abgebildet, so daß die Punkte, die zu Kugeln bestimmter Geschwindigkeitsbereiche gehören, in entsprechenden Bereichen im Geschwindigkeitsraum enthalten sind und dort eine bestimmte Dichte $f(\xi, \eta, \zeta)$ bzw. $F(\xi, \eta, \zeta)$ aufweisen. Es wird zunächst untersucht, welche Verschiebungen die Punkte eines gewissen Gebietes dadurch erfahren, daß die zugehörigen Kugeln mit Kugeln zusammenstoßen, deren zugehörige Punkte einem anderen Gebiet angehören. Hiedurch ist es dann möglich, die Zahl der Geschwindigkeitspunkte zu berechnen, die in einem Zeitelement Δt aus einer bestimmten Richtung in ein Element des Geschwindigkeitsraumes eintreten bzw. aus ihm austreten. Durch Heranziehung des Boltzmann'schen „Stoßzahlansatzes“ lassen sich dann schließlich Gleichungen gewinnen, die die Änderungen Δf bzw. ΔF der Dichten der Geschwindigkeitspunkte in dem Zeitelement Δt mit gewissen Integralen über die Dichtefunktionen verknüpfen. Verlangt man, daß $\Delta f / \Delta t$ bzw. $\Delta F / \Delta t$ verschwinden, die Dichten also von der Zeit unabhängig oder die Geschwindigkeitsverteilung stationär ist, dann stellen die erwähnten Gleichungen Funktionalgleichungen für die Dichtefunktion $f(\xi, \eta, \zeta)$ und $F(\xi, \eta, \zeta)$ dar, deren Lösung das Geschwindigkeitsverteilungsgesetz liefert, das sich in der Tat als das Maxwell'sche für ein binäres Gasmisch erweist. *Fürth (Prag).*

Condon, E. U.: A simple derivation of the Maxwell-Boltzmann law. Phys. Rev., II. s. **54**, 937—940 (1938).

Es wird angenommen, daß das betrachtete mechanische System eine diskrete Anzahl erlaubter Zustände hat und daß jedem von ihnen das gleiche statistische Gewicht a priori zukommt. Im Falle eines Gases, das aus einer großen Zahl N von un-

abuhängigen Molekülen besteht, die in einem bestimmten Volumen eingeschlossen sind, läßt sich aus einer bekannten geometrischen Betrachtung zeigen, daß die Zahl $C_N(W)$ der Zustände, deren Energie kleiner ist als W , proportional ist zu $W^{3N/2}$. Fügt man noch ein Molekül hinzu, dann ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit $P(w)dw$ dafür, daß die Energie dieses Moleküls zwischen w und $w + dw$ liegt:

$$P(w)dw \sim C'_N(W - w) \cdot C'_1(w)dw \sim (1 - w/W)^{\frac{3N}{2}-1} \cdot w^{\frac{1}{2}}dw \sim e^{-w/kT} w^{\frac{1}{2}}dw,$$

mit $W = 3NkT/2$, also das Maxwell-Boltzmannsche Gesetz. In ähnlicher Weise kann man vorgehen, wenn die Anzahl der Energieniveaus nicht so groß ist, daß man $C(W)$ als stetige Funktion behandeln kann. Ist w_α die α -te Energiestufe und g_α ihr statisches Gewicht (Entartungsgrad), dann gilt statt der obigen Formel $P(w_\alpha) \sim g_\alpha e^{-w_\alpha/kT}$. Schließlich kann man auch noch zeigen, daß die Berücksichtigung des Pauliprinzipis statt der Boltzmannschen die Fermi-Diracsche Verteilung liefert. Fürth (Prag).

Niessen, K. F., und C. J. Bakker: Einige Bemerkungen zur Theorie der Brownschen Bewegung. (*Natuurkundig Laborat. d. N. V. Philips' Gloeilampenfabriek., Eindhoven, Holl.*) Physica, Haag 5, 977—985 (1938).

Im ersten Teil der Arbeit wird untersucht, unter welchen Bedingungen aus der Lorentzschen Bewegungsgleichung für die eindimensionale Brownsche Bewegung: $m \frac{dv}{dt} + rv = K(t)$ die Einsteinsche Gleichung $\bar{s}^2(t) = \frac{2kT}{r}t$ für das mittlere Verschiebungsquadrat während der Zeit t folgt, wenn angenommen wird, daß die Kraft K in den Zeitpunkten $0, \tau, 2\tau \dots$ plötzliche Änderungen der Geschwindigkeit v des Teilchens hervorruft. Es zeigt sich, daß diese Bedingungen lauten: $\frac{\tau}{\theta} \ll 1, \frac{t}{\theta} \gg 1$, worin $\theta = \frac{m}{r}$ eine Art „Abklingungszeit“ für die Wirkung des Stoßes bedeutet. Im

zweiten Teil der Arbeit wird angenommen, daß die Kraft K nicht momentan, sondern eine gewisse Zeitlang auf das Teilchen wirke, so daß sich die von Ornstein entwickelte Korrelationsrechnung anwenden läßt. Es werden verschiedene analytische Ansätze für die Zeitabhängigkeit von K versucht, und es wird gezeigt, daß unabhängig von der speziellen Annahme das mittlere Quadrat des Impulses I gleich $I^2 = 2kT\tau$ ist. Fürth.

Le Boiteux, H., et Quang Te Tchao: Sur la loi de répartition des mobilités des gros ions. J. Phys. Radium, VII. s. 9, 501—504 (1938).

Um das Verteilungsgesetz für die Beweglichkeit großer Ionen in einem Gas experimentell zu ermitteln, wird ein elektrisch geladener Rauch erzeugt, und die Teilchen desselben werden in einem elektrischen Wechselfeld ultramikroskopisch beobachtet und photographiert. Sie erscheinen dann als Striche bestimmter Länge l , da sie im Felde eine schwingende Bewegung mit der Amplitude l ausführen. Die Bewegungsgleichung für den vorliegenden Fall wird aufgestellt und gelöst. Ihr Resultat lautet:

$l = \frac{\gamma h_0 T}{\pi}$, worin γ die gesuchte Beweglichkeit, h_0 die Amplitude des elektrischen Wechselfeldes, T seine Schwingungsdauer bedeutet. Es zeigt sich, daß die Verteilungskurve der γ für einen bestimmten Wert ein scharfes Maximum hat, woraus auf das vorzugsweise Vorhandensein von Ionen mit einem bestimmten Radius geschlossen wird. Fürth.

Archibald, William J.: The process of diffusion in a centrifugal field of force. Phys. Rev., II. s. 53, 746—752 (1938).

Archibald, William J.: The process of diffusion in a centrifugal field of force. II. Phys. Rev., II. s. 54, 371—374 (1938).

Eine Lösung von Kolloidpartikeln oder Molekülen befinde sich in einer Zentrifuge, so daß eine „Sedimentation“ unter der Zusammenwirkung von Zentrifugalkraft und Diffusion stattfindet. Die Differentialgleichung für die Konzentration $c(r, t)$, von der angenommen wird, daß sie nur vom Radius r und der Zeit t abhängig sei, lautet in diesem Falle: $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \left(D \frac{\partial c}{\partial r} - \omega^2 r s c \right) r \right\} = \frac{\partial c}{\partial t}$, worin D die Diffusions-, s die Sedimen-

tationskonstante und ω die konstante Winkelgeschwindigkeit der Rotation ist. Im ersten Teil der Arbeit wird angenommen, daß die Diffusionszelle als Grundriß einen Kreissektor vom Radius r_1 hat, so daß für $r = r_1$ die Randbedingung $\frac{\partial c}{\partial r} - \frac{\omega^2 s}{D} r c = 0$ erfüllt sein muß. Im zweiten Teil wird eine Diffusionszelle angenommen, deren Grundriß von zwei Kreisbogen mit den Radien r_1 und r_2 und zwei Radien begrenzt ist. In diesem Fall muß die obige Randbedingung auch noch für $r = r_2$ erfüllt sein. Es wird gezeigt, daß sich die allgemeine Lösung in der Form $c(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot M(\alpha_n, z) e^{(\alpha_n - 1) z \omega^2 s t}$

darstellen läßt, worin die Funktionen $M(\alpha_n, z)$ Lösungen der Differentialgleichung $\frac{d^2 M}{dz^2} + \left(\frac{1}{z} - 1\right) \frac{dM}{dz} - \frac{\alpha}{z} M = 0 \quad \left(z = \frac{\omega^2 s}{D} \cdot \frac{r^2}{2}\right)$ sind, die den Randbedingungen $\frac{d}{dz} M(\alpha, z) - M(\alpha, z) = 0$ für $z = a$ und $z = b$ unterliegen. Reihenentwicklungen für diese Funktionen werden angegeben und eine Gleichung aufgestellt, deren Wurzeln die Konstanten α_n sind. Die A_n sind Konstanten, die sich aus der Anfangsbedingung $c(z, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n M(\alpha_n, z)$ ergeben, worin $c(z, 0)$ eine willkürlich gegebene Funktion, die Anfangsverteilung der Konzentration, ist. Von den allgemeinen Formeln werden einige praktische Anwendungen für bestimmte numerische Daten gemacht. *Fürth.*

Lucas, René: Sur le mécanisme de la fusion. C. R. Acad. Sci., Paris 207, 1408—1410 (1938).

Wie der Versuch zeigt, nimmt die Festigkeit eines Festkörpers bei Annäherung an den Schmelzpunkt stetig ab. Faßt man die Wärmebewegung als ein System von Wellen auf, dann müssen in dem Körper durch die Transversalwellen innere Spannungen auftreten, die, wenn die Festigkeit auf einen bestimmten Wert gesunken ist, ein Zerreißen des Körpers bewirken werden. Hierauf soll der Mechanismus des Schmelzprozesses beruhen. Aus der Überlegung geht auch hervor, daß sehr kleine Mikrokristalle einen höheren Schmelzpunkt besitzen müssen als ein ausgedehnter Einkristall. *Fürth.*

Landé, Alfred: Transitions between levels spaced almost continuously. Phys. Rev., II. s. 54, 940—944 (1938).

Die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen eng benachbarten Atomenergieniveaus führen zu scheinbaren Unendlichkeiten, wenn die Störung endlich ist und die üblichen Störungsmethoden angewendet werden. Verf. gibt hier eine Näherungsmethode an, die diese Unendlichkeiten vermeidet, indem sie im Gegensatz zu den bekannten Methoden nicht von einer (nicht streng konvergierenden) Reihenentwicklung, sondern von einem strengen Ausdruck für die Koeffizienten der grundlegenden Entwicklung der Wellenfunktion nach ungestörten Wellenfunktionen Gebrauch macht. Es zeigt sich, daß die so erhaltenen endlichen Übergangswahrscheinlichkeiten mit den endlichen Teilen der üblichen Ausdrücke in 1. und 2. Ordnung identisch sind, daß aber in höherer Ordnung zusätzliche endliche Terme auftreten. *Henneberg* (Berlin).

Agno, Mario: Ricerche italiane nel campo delle applicazioni della statistica alle scienze fisiche, negli anni XIV—XV E. F. (26. riun., Venezia, 12.—18. IX. 1937.) Atti Soc. ital. Progr. Sci. 2, 109—113 (1938).

Versicherungsmathematik und verwandte Anwendungen:

● Strohmeier, Herbert: Versicherungsmathematische Formelsammlung für die Praxis der Lebensversicherung. Hrsg. v. dtsh. Aktuarver. Mit einem Vorwort v. Paul Lorenz u. Eduard Rose. Berlin: Neumanns Z. f. Versicherungswe 1938. 35 S. RM. 1.60.

Snoep, J.: Interpolation bei veränderlichem Zinsfuß in der Lebensversicherungsmathematik und Zinsrechnung. Verzekerings-Arch. 19, 106—115 (1938) [Holländisch].

Wird m durch $a_{\overline{m}} = a_x$ bzw. durch $\bar{a}_{\overline{m}} = \bar{a}_x$ definiert, dann ist mit großer An-

näherung m eine lineare Funktion vom Zinsfuß i bzw. von der Zinsstärke δ . — Verf. untersucht analoge Verhältnisse im Falle der Tilgung von Anleihen. *Simonsen*.

Getman, Richard A.: Attained age valuation of life annuities. Trans. Actuar. Soc. Amer. 38, 463—474 (1937).

Verf. zeigt, wie man mittels Hollerith-Lochkarten die Gruppenberechnung von Prämienreserven bei verschiedenen Rentenversicherungsformen anlegen kann, und zwar derart, daß man neben den Prämienreserven auch Maßzahlen für statistische Zwecke erhalten kann.

W. Simonsen (Kopenhagen).

Giaccardi, F.: Sul calcolo del vitalizio nell'ipotesi di Makeham. Giorn. Ist. Ital. Attuari 9, 252—265 (1938).

Der Barwert einer temporären Leibrente läßt sich unter der Voraussetzung, daß die Absterbeordnung dem Gompertz-Makehamschen Gesetz genügt, im wesentlichen auf das Integral $\int_0^t e^{\mu u + r e^u} du$ zurückführen. Verf. entwickelt den Integranden nach

Besselfunktionen des Arguments $2r$ und führt dann die Integration gliedweise durch, wobei er auch eine Abschätzung des Restgliedes angibt. Verf. leitet endlich eine zweite Reihenentwicklung für den Barwert der Leibrente her, bei der kein Gebrauch von Besselfunktionen gemacht wird.

Frucht.

Güttinger, P.: Eine versicherungsmathematische Beziehung bei Gesamtheiten mit mehreren Ausscheideursachen. Mitt. Vereinig. schweiz. Versich.-Math. H. 36, 59—68 (1938).

Es wird eine allgemeine Formel für den Barwert der sofort fälligen und anwartschaftlichen Leistungen (Renten und Kapitalien), welche bei vielen praktisch vorkommenden, verwickelteren Versicherungsarten eine verhältnismäßig einfache Bestimmung der benötigten Kommutationswerke erlaubt, abgeleitet. Allgemeine Ausscheideordnungen der Gesamtheiten, aus denen die Mitglieder wegen mehrerer verschiedener Ursachen ausscheiden, werden definiert. Der allgemeinen abgeleiteten Gleichung entspricht in einem speziellen Fall die Schärflinsche Formel

$$l_x^{aa}(a_x^{ai} + a_x^{aa}) + (l_x - l_x^{aa})a_x^{ai} = l_x a_x.$$

An einigen Beispielen wird gezeigt, wie die abgeleitete Gleichung zur Vereinfachung von Berechnungen der Barwerte mit steigenden Leistungen verwendet werden kann.

Janko (Praha).

Wünsche, Günther: Eine nomographische Behandlung des Zinsfußproblems in der Lebensversicherung. Arch. math. Wirtsch.- u. Sozialforschg 4, 191—226 (1938).

Ändert sich der Zinsfuß i um ε , $i^* - i = \varepsilon$, so ändert sich der Barwert der Leibrente $a_{x,z} = {}_{|z-x}a_x$ in $a_{x,z}^* = a_{x,z}(1 + \varrho_{x,z}(\varepsilon))$. Auf diese relative Änderung $\varrho_{x,z}$ lassen sich auch die relativen Änderungen von $A_{x,z}$, $P_{x,z}$, $V_{x,z}(w)$ zurückführen. Es wird daher zunächst an die nomographische Erfassung von $\varrho_{x,z}$ gegangen; zu diesem Zwecke wird $\varrho_{x,z}(\varepsilon)$ bis zur zweiten Ordnung ε^2 nach MacLaurin entwickelt, dieser Ausdruck wird durch die „projektive“ Annäherung in der Form $\varrho_{x,z} = \frac{\varphi \cdot \varepsilon}{\varepsilon + \psi}$ ersetzt; der erhaltene Wert wird in die nomographisch brauchbare Form gebracht und damit die grundsätzliche Gestalt des Nomogramms gewonnen. Eine ergänzende graphische Darstellung führt auf eine vereinfachende Annahme, die selbst wieder eine wesentliche Vereinfachung der Nomogrammkonstruktion ergibt. Eine Hilfstafel und die Grundtafel geben nun $\varrho_{x,z}$. Anschließend werden die Tafel zur Ermittlung der relativen Änderungen der Größen $A_{x,z}$, $P_{x,z}$, $V_{x,z}(w)$ und die Tafel zur Ermittlung dieser Größen selbst hergestellt.

F. Knoll (Wien).

Meidell, Birger: Über verschiedene explizite Lösungen des Problems von der Berechnung des effektiven Zinsfußes bei Anleihen. Skand. Aktuarie Tidskr. 21, 129—144 (1938).

Die bisher gegebenen Lösungen dieses Problems sind entweder recht ungenau

oder die Konvergenz der Reihen ist zu langsam. Entwickelt man jedoch

$$K = \sum_1^n A_t e^{-t\delta} \doteq e^{-\delta z} \left[\sum_1^n A_t - \frac{\delta}{1} \sum_1^n A_t \cdot (t-z) + \frac{\delta^2}{2} \sum_1^n A_t \cdot (t-z)^2 \right]$$

und bestimmt das bisher willkürliche z durch die Bedingung

$$\sum_1^n A_t \cdot (t-z) = 0, \quad z = z_1,$$

so erhält man die Näherungsformel $K = e^{-\delta z_1} \left(1 + \frac{\delta^2}{2} (z_2 - z_1^2) \right) \sum_1^n A_t$, die man durch

$\ln K = -\delta z_1 + \frac{\delta^2}{2} (z_2 - z_1^2) + \ln \sum_1^n A_t$ ersetzen kann. Bedeutet δ_1 die nominelle Verzin-

sungsintensität der Anleihe, so kann man zu der Darstellung $(\delta^2 - \delta_1^2) z_0 - 2(\delta - \delta_1) - \frac{2 \ln K}{z_1} = 0$ gelangen. Diese Formel liefert, wie Tabellen zeigen, recht befriedigende

Lösungen. Eine kleine Modifikation dieses Ausdruckes ergibt auch in dem Falle weniger guter Lösungen der angegebenen Formel brauchbare Lösungswerte. *F. Knoll.*

Del Vecchio, Ettore: Sul calcolo approssimato di una rendita vitalizia quando il tasso di mortalità muta nei primi anni della durata. Giorn. Mat. Finanz., II. s. 8, 14—25 (1938).

Die Leibrenten werden durch einen angenäherten linearen Ausdruck der Sterbenswahrscheinlichkeiten q_y dargestellt; so ist die Berechnung einer Leibrente bei Veränderung der q_y in den ersten Versicherungsjahren (was bei Anwendung einer Selektionstafel von Nutzen sein kann) leicht durchführbar. *Bruno de Finetti (Trieste).*

Insolera, Filadelfo: Die Prämienreserven und die Veränderungen der Sterblichkeit in der Zeit. Bl. Versch.-Math. 4, 388—392 (1939).

Die mathematische Reserve wird als Funktion der Zeit neben dem Alter und der zurückgelegten Versicherungsdauer betrachtet. Der Autor hat in den Bl. Versch.-Math. 2, 126—137 unter gewissen Voraussetzungen bewiesen, daß die mathematische Reserve unter sonst gleichen Umständen mit der Zeit zunimmt, wenn die Sterblichkeit in gleichem Alter mit der Zeit abnimmt und die Sterblichkeitsverminderung gleichzeitig mit der Alterszunahme abnimmt. Diese Eigenschaft ist von P. Vasmoeen (Skand. Aktuarie Tidskr. 1935; dies. Zbl. 11, 264) als nicht stichhaltig bezeichnet worden. Deswegen gibt der Verf. einen ausführlichen Beweis des oben angeführten Satzes am Beispiel der lebenslänglichen Todesfallversicherung mit gleichen, während der ganzen Dauer zahlbaren Prämien. Zum Schluß wird gezeigt, daß man wirklich zum entgegengesetzten Resultat kommt, wenn man die Hypothese, daß die Versicherten einen Anteil am Sterblichkeitsgewinn haben, fallen läßt und demnach zwecks Schätzung der Verpflichtungen der Versicherten annimmt, daß die Sterblichkeit von t unabhängig ist. *Janko (Praha).*

Quensel, Carl-Erik: Calculation of death-rates with regard to migrations. Skand. Aktuarie Tidskr. 21, 23—30 (1938).

Bei der Berechnung der Sterbewahrscheinlichkeit q_x wird die mittlere Bevölkerungszahl M_x vom Alter x benötigt; sind die Bevölkerungszahlen a_{0x} und a_{1x} der Altersklassen $x \dots x+1$ zu Anfang und Ende des Beobachtungsjahres bekannt, so setzt man $M_x = \frac{1}{2}(a_{0x} + a_{1x})$ (*). Will man Ein- und Auswanderung berücksichtigen, so genügt nicht die Kenntnis der beiden Auswanderungsraten U_0 und U_1 der Altersklassen x und $x+1$ im Beobachtungsjahr und die vom Schwedischen Statistischen Zentralbüro angewandte Korrektur $+\frac{1}{6}(U_1 - U_0)$ in (*), sondern man muß die im Zeitraum $t \dots t+dt$ Ausgewanderten der Altersklasse $y \dots y+dy$ durch $U(t, y) dt dy$ abzählen und zu (*) die Korrektur

$$+\int_0^1 \int_0^t U(t, y) (t-y) dy dt - \int_0^1 \int_{t-1}^0 U(t, y) (1-t+y) dy dt$$

hinzufügen, die man unter der Annahme einer linearen Funktion $U(t, y) = c_0 + c_1 t + c_2 y$ durch $\frac{1}{2}(c_1 + c_2)$ ersetzen kann. — Soll q_x für verschiedene Familienstände berechnet werden, so drückt man die Zahl der Ehen analog zu oben durch $\int (c_0 + c_1(t - y)) dt dy$ aus; dann ist zu M_x die Korrektur (in der Arbeit verdruckt!)

$$\frac{3v_2 - 2v_1}{6(v_1 - v_2)} G_0 + \frac{4v_1 - 3v_2 - 1}{6(v_1 - v_2)} G_1, \quad \left[v_i = \int_0^1 f(t) t^i dt, v_0 = 1 \right]$$

hinzuzufügen, worin G_0 und G_1 eine zu U_0, U_1 analoge Bedeutung haben.

Harald Geppert (Gießen).

Del Chiaro, A.: Sulla determinazione dei coefficienti di morbilità. Giorn. Ist. Ital. Attuari 9, 266—271 (1938).

Bei der Berechnung des „Morbiditätsfaktors“ sind die gleichen Formeln anwendbar, nach denen die Sterbenswahrscheinlichkeit für eine offene Bevölkerung ausgedrückt zu werden pflegt.

Bruno de Finetti (Trieste).

Insolera, Filadelfo: Sui tassi annuali di mortalità. (26. riun., Venezia, 12.—18. IX. 1937.) Atti Soc. ital. Progr. Sci. 1, 36—39 (1938).

Ist der Umfang einer geschlossenen Gruppe Gleichzeitgeborener N , x ein bestimmtes Lebensalter, so folgt aus der dauernd geltenden Beziehung $N = l_x + \Delta_x$ auch die Bedeutung von Δ_x . Die Bedeutung weiterer neu eingeführter Begriffe ist aus den folgenden Definitionen unmittelbar ablesbar: $s|_r\mathcal{K}_x = \frac{l_{x+s} - l_{x+s+r}}{r l_x}$, $s|_r q_x = r s|_r \mathcal{K}_x$,

$$s|\mu_x = -\frac{l'_{x+s}}{l_x}, s|\nu_x = \frac{\Delta'_{x+s}}{\Delta_x}, s|q_x = \frac{l_x - l_{x+s}}{l_x}, s|q_x = s|\mathcal{K}_x, s|\dot{q}_x = |s|q_x + s|\mu_x.$$

F. Knoll (Wien).

Ten Pas: Vergleichende Untersuchung der Sterblichkeit in der Gesamtbevölkerung der Niederlande und bei den Versicherten einer Gruppe holländischer Lebensversicherungsgesellschaften in den Jahren 1925—1936. Verzekerings-Arch. 19, 81—105 (1938) [Holländisch].

Beckerath, U. v.: Über Chr. Kramp's versicherungsmathematische Arbeiten und seine Formel zur Darstellung der Sterblichkeit, nebst einigen Bemerkungen über die Bestätigung seiner Ansichten durch neuere Untersuchungen. Skand. Aktuarie Tidskr. 21, 145—156 (1938).

Itô, Kiyosi: On the distribution of population by ages. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 20, 908—911 (1938).

Proof by means of multidimensional geometry of the well known fact [see f. ex. Sharpe and Lotka, A problem in age-distribution, Philos. Mag. 21, 435 (1911)] that the relative age-distribution of a stable population with limiting age ω tends to $l_x c^{-x} \int_0^\omega l_\xi c^{-\xi} d\xi$, where l_x is the decrement function and c the relative growth rate of the population.

W. Simonsen (Kopenhagen).

Wilson, Edwin B.: The standard deviation of sampling for life expectancy. J. Amer. Statist. Assoc. 33, 705—708 (1938).

Folgende Näherungsformel für die Streuung der vollständigen Lebenserwartung (\hat{e}) wird ausgeführt:

$$\sigma^2(\hat{e}_x) = \sum_{y \geq x} (l_y/l_x)^2 (\hat{e}_{y+h} + \frac{1}{2}h) \sigma^2(q_y); \quad \sigma^2(q_y) = h^2 (q_y/h m_y)^4 m_y (1 - m_y)/n_y.$$

Dabei ist h das Intervall zwischen zwei nacheinanderfolgenden Altern und n_y die Anzahl der Beobachtungen beim Alter y .

Kołodziejczyk (Warschau).

Insolera, F.: Sulla durata massima della vita umana. Giorn. Mat. Finanz., II. s. 8, 1—13 (1938).

Der Begriff des äußersten (extremen) Alters bei einer geschlossenen Gruppe Gleichzeitgeborender bietet keine Schwierigkeit, hingegen zwingen die in der Bevölkerungsstatistik hauptsächlich auftretenden offenen, nichtstationären Gruppen die Begriffe „größtes (maximales)“ und „äußerstes (extremales)“ Alter auseinander zu halten:

extremales Alter ist das Höchstalter der Toten eines Jahres, sofern nicht die Lebenden der Gruppe ein gleiches oder höheres Alter aufweisen; ist jedoch das Alter eines Lebenden der Gruppe höher als das aller anderen Lebenden der Gruppe und das im Laufe des betreffenden Jahres beobachtete höchste Sterbealter, so wird dieses Alter als maximales Alter bezeichnet. Diese Begriffsbildung wird an statistischem italienischen, schweizerischen und schwedischen Material studiert. *F. Knoll (Wien).*

Wilks, S. S.: Fiducial distributions in fiducial inference. Ann. math. Statist. 9, 272—280 (1938).

A survey of principles and main results regarding fiducial limits (or "confidence intervals") in the case of a population depending on one unknown parameter. Reference is made to papers of Wilson (J. Amer. Statist. Assoc. 22, 209), R. A. Fisher (this Zbl. 5, 174; Ann. Eugen. 6, 391), Neyman (this Zbl. 10, 72; 17, 124), Wilks (Ann. Math. Statist. 9, 166), Segal (this Zbl. 18, 157). *Kołodziejczyk (Warschau).*

Zwiggli, E.: Bemerkungen zum Erneuerungsproblem. Mitt. Vereinig. schweiz. Versich.-Math. H. 36, 69—73 (1938).

Die Lösung $\varphi(t)$ der Integralgleichung für die Erneuerung in der von Fock (Math. Z. 21) aufgestellten allgemeinen Formel wird angeführt und gezeigt, wie die Lösung $\varphi(t) = \frac{\lambda}{2}(1 - e^{-2\lambda t})$ von Hadwiger daraus als Spezialfall hervorgeht. Der Autor bemerkt, daß diese Integralgleichung für die Erneuerungsfunktion $\varphi(t)$ in eine Differentialgleichung $(n-1)$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten umgeformt und als solche gelöst werden kann. *Janko (Praha).*

Andersson, Walter: The Swedish state unemployment insurance and the reinsurance problem of the funds. Skand. Aktuarie Tidskr. 21, 157—207 (1938).

Nach einem historischen Rückblick wird ein knappes Bild von den Bedingungen der schwedischen staatlichen Arbeitslosigkeitsversicherung entworfen. Die Besonderheit des Risikos zwingt zur Einrichtung der „regulären Reserve“ (F). Staatliche Zuschüsse S , Beiträge der Versicherten P und die Zinsen der regulären Reserve bilden die Einnahmen, denen Leistungen an die Versicherten B und Verwaltungskosten A als Ausgaben gegenüberstehen; die Ermittlung von F ist die erste Aufgabe; der staatliche Zuschuß setzt sich aus der Verwaltungsbeihilfe S_A und der Leistungsbeihilfe S_B zusammen, für ihre Berechnung wird der Weg gewiesen. Ein Ausdruck zur Bestimmung der wöchentlichen Beitragshöhe wird angegeben. In dem Ausdruck für S_B tritt eine Funktion $p(u, d)$ auf, die von der täglichen Unterstützungshöhe d und der durchschnittlichen Zahl von Unterstützungstagen u abhängt, für diese Funktion wird eine Darstellung gegeben. Die „jährliche Nettoprämie“ läßt sich durch diese Funktion ebenfalls ausdrücken. Der Verschiedenheit des Risikos bei verschiedenen Berufsgruppen wird durch Einführung einer reduzierenden Funktion Rechnung getragen. Die großen Schwankungen der Arbeitslosigkeit legen Rückversicherung nahe; nach einer knappen Entwicklung ihrer theoretischen Grundlagen folgt ihre Anwendung; drei Plantypen werden gezeigt. Eine eingehendere Behandlung dieser grundlegenden Arbeit, die neben umfangreichen theoretischen Ausführungen zahlreiche Tabellen bringt, ist im Rahmen eines knappen Referates nicht möglich. *F. Knoll (Wien).*

Ullmo, Jean: Recherches sur l'équilibre économique. Ann. Inst. H. Poincaré 8, 1—62 (1938).

● Kosiol, Erich: Finanzmathematik. Lehrbuch der Zinseszins-, Renten-, Tilgungs-, Kurs- und Rentabilitätsrechnung für Praktiker und Studierende. Hamburg: Hanseat. Verlagsanst. 1938. 122 S. RM. 3.80.

Das vorliegende Lehrbuch behandelt durchaus elementar alle jene Fragen der Finanzmathematik, die sich auf diesem Wege darstellen lassen, und vermeidet alle anderen Gebiete. Die klare Darstellung, reiche Beispielsammlung, eingehende Behandlung der Rentabilitätsrechnung wird der Praktiker begrüßen. *F. Knoll (Wien).*